

幾何学特論 A (MTH.B401) 講義資料 4

お知らせ

- 休日のため、今回は提出課題をお休みとします。

前回までの訂正

- “matrices” は “matrixes” の誤りではないか、というご指摘がありましたが、matrix の複数形は matrices です。Lemma の複数形 lemmata や formula の複数形 formulae はそれぞれ lemmas, formulas に置き換わってきていますが、matrices はまだ matrixes には置き換わっていないようです。同様の不規則複数形に index (sg.), indices (pl.) があります。こちらは indexes という言い方もあるらしい。
- 講義資料 3, 前回までの訂正の 4 項目：最後の閉じ括弧が 1 つ多い。
- 講義資料 3, 前回までの訂正の 9 項目：分母の $\mathcal{V}(f_0)^{1/3} \Rightarrow \mathcal{V}(f_0)^{-1/3}$
- 講義資料 3, 授業に関するご意見の 2 つ目：尾根がいします \Rightarrow お願いします
- 講義資料 3, 質問 4：極地問題 \Rightarrow 極値問題
- 講義資料 3, 質問 5 の回答：いるんでしょうか? \Rightarrow いると思います。
- 講義ノート, 18 ページ, 4 行目： $== \Rightarrow =$
- 講義ノート, 19 ページ, 6, 7 行目： $F \Rightarrow \mathcal{F}$ (2 箇所)
- 講義ノート, 20 ページ, 4 行目： $== \Rightarrow =$
- 講義ノート, 20 ページ, 5 行目： $\mathcal{F}_2^t \mathcal{F}_1 \Omega \Rightarrow \mathcal{F}_2^t(\mathcal{F}_1 \Omega)$
- 講義ノート, 20 ページ, 6 行目：there exist constant matrix \Rightarrow there exists a constant matrix
- 講義ノート, 20 ページ, 9 行目： $\gamma_2 = A\dot{\gamma}_1 + \mathbf{a} \Rightarrow \gamma_2 = A\dot{\gamma}_1 + \mathbf{a}$ (右側のドットをとる)
- 講義ノート, 20 ページ, 一番下： $f(t, s) := (x(s), y(s) \cos t, y(s) \sin t), d \Rightarrow f(t, s) := (x(s), y(s) \cos t, y(s) \sin t)$, (最後の d を削除)
- 講義ノート, 21 ページ, 3 行目：second fundamental form of $f \Rightarrow$ second fundamental form II of f
- 講義ノート, 21 ページ, (3.7) 式：

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{1}{2H} \sqrt{(2Ha+1)^2 - 2(2Ha+1) \cos 2Hs}, & y(s) &= \frac{1}{2|H|} \sqrt{(2Ha+1)^2 - 2(2Ha+1) \cos 2Hs+1}, \\ x(s) &= \int_0^s \frac{1 + (2aH+1) \cos 2Hu}{y(u)} du, & x(s) &= \int_0^s \frac{(2Ha+1) \cos 2Hu-1}{2Hy(u)} du, \end{aligned} \Rightarrow$$

- 講義ノート, 22 ページ, (3.10) 式： $2HF \Rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$
- 講義ノート, 23 ページ, 下から 6 行目：“without loss of generality.” に次の脚注を追加。
Note that H changes its sign by a reflectoin. Under these assumptions, H must be non-positive because of (3.6).
- 講義ノート, 23 ページ, 一番下：

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{1}{(2H)^2} ((2Ha+1) \cos 2Hs - 1)^2 + (2Ha^2+1) \sin^2 2Hs \\ &\Rightarrow y^2 = \frac{1}{(2H)^2} ((2Ha+1) \cos 2Hs - 1)^2 + (2Ha+1)^2 \sin^2 2Hs \end{aligned}$$

- 講義ノート, 24 ページ, 2 行目:

$$y = \frac{1}{2H} \sqrt{(2Ha+1)^2 - 2(2Ha+1) \cos 2Hs} \Rightarrow y = \frac{1}{2|H|} \sqrt{(2Ha+1)^2 - 2(2Ha+1) \cos 2Hs+1}$$

- 講義ノート, 24 ページ, 3 行目: (??) \Rightarrow (3.15)
- 講義ノート, 24 ページ, 4 行目:

$$y\dot{x} = \frac{1}{2H} (1 + (2aH+1) \cos 2Hs) \Rightarrow y\dot{x} = \frac{1}{2H} ((2aH+1) \cos 2Hs - 1).$$

- 講義ノート, 24 ページ, 5 行目: Thus we have the conclusion \Rightarrow
Thus we have the conclusion when $H < 0$. By replacing s by $-s$, the mean curvature changes the sign.
Hence the same expressions are obtained.

授業に関する御意見

- 解いたあとに「曲線と曲面」を見たら、解答があって悲しい気持ちになりました。
山田のコメント: でも、解いてみると楽しいでしょ。
- HW の解説から授業の展開までが十分滑らかでした。
山田のコメント: なるほど。
- レポート問題の何度が昨年に比べて上がっている気がします。(易化してほしいわけではないです!)
山田のコメント: そうかなあ

質問と回答

質問 1: $A(\gamma)$ の定義で $(\gamma \cdot n)$ がありましたが n を leftward にとっているため、内積の値がマイナスになるのでは? と思いました。

お答え: そうですね。凸曲線の内部に原点をとると面積が負になります(なんかそういうコメントをした気がします)。

質問 2: 前回の面積を一定に保ち周が最小になるものを求める問題は等周問題(周を一定に保ち面積が最大になるものを求める)と同値な問題なのでしょうか。

お答え: はい。

質問 3: 平均曲率が 0 で一定と 0 以外で言っていでは大分様相が違ってくるのですが、なぜでしょうか。

お答え: 答えになっているかどうかわかりませんが、ガウス方程式(驚異の定理)がかなり違った性質を持っています。「幾何学特論 B」で少し扱います。

質問 4: 複数のしゃぼん玉がくっつくと、自己交差のある曲面のようになりますが、こういうものは平均曲率一定のはめ込みに対応していますか? それとも別の数学的な取り扱いがありますか?

お答え: はい、場合によっては特異点をもったりもします。その場合は曲面概念の拡張が必要です。たとえば

Frank Morgan, Geometric Measure Theory: A Beginner's Guide, Academic Press (2008, Fourth Ed.)

フランク・モーガン, 幾何学的測度論—石けん膜の数理解析, 儀我美一訳, 1997, 共立出版

参照。