2018 年 6 月 26 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論 B （MTH.B402）講義資料 3

お知らせ

- 予定表には日程を入れておりましたが，都合により **7 月 31 日（火）は講義を行いません**.

前回までの訂正

- 講義資料 2, 前回の補足の 3 行目：$\vec{e}' \Rightarrow \boldsymbol{e}'$
- 講義ノート 14 ページ，4 行目：follows form ⇒ follows from
- 講義ノート 16 ページ，9 行目：$d\Theta - \Theta\wedge\Theta = O \Rightarrow d\Theta + \Theta\wedge\Theta = O$.
- 講義ノート 17 ページ，下から 2 行目：$-X\Omega\Lambda - \frac{\partial X}{\partial u}\Lambda \Rightarrow -X\Omega\Lambda + \frac{\partial X}{\partial u}\Lambda$
- 講義ノート 18 ページ，8 行目：uniqueness of the initial value problems ⇒ uniqueness of the solutions of initial value problems
- 講義ノート 19 ページ，下から 7 行目：linear partial equations ⇒ linear partial differential equations
- 講義ノート 19 ページ，下から 3 行目：Theorem ??⇒ Theorem 2.3
- 講義ノート 20 ページ，2 行目：$f = \omega \Rightarrow df = \omega$.
- 講義ノート 22 ページ，8 行目：give a proof ⇒ give a proof (for a special case)
- 講義ノート 24 ページ，下から 3 行目：$V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(u,0)\,|\,u < 0\} \subset U \Rightarrow V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(u,0)\,|\,u \leqq 0\} \subset U$

授業に関する御意見

- プリントにある形の Poincaré の補題の証明は初めて見たものでしたので，非常に興味深く感じました.

  山田のコメント： 無理やりフロベニウスの定理に押し付ける感じですね．直接証明の方が筋がよいかもしれません.

質問と回答

質問 1： 今回の定理の証明で，リーマンの写像定理を使いましたが，少しオーバーキルな気がします．他の手軽な証明法としてはどのようなものがありますか？

お答え： 全くそのとおりですね．次元があがるとこの方法は使えませんし．次のようにやってみてもよいでしょう：いま, 起点 (u_o, v_o) を一つ固定して, (u,v) を任意にとり, (u_0, v_0) と (u,v) を結ぶ C^∞-級の道 $\gamma_0(t) = (u_0(t), v_0(t))$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ を考え，これに沿って常微分方程式

$$\frac{dF}{dt} = F\left(\Omega\frac{du_0}{dt} + \Lambda\frac{dv_0}{dt}\right) \qquad F(0) = X_0$$

を解く．このとき，$F(1)$ は道のとり方によらない．実際，別の道 $\gamma_1(t)$ をとるとき，単連結性から γ_0 から γ_1 へのなめらかな変形（ホモトピー）γ_s が存在する．そこで，各 γ_s に関して上のような常微分方程式の解を $F(s,t)$ と書くことにすると，$F(s,1)$ が一定であることが示される（ここで可積分条件を用いる）．したがって，この値を $\mathcal{F}(u,v)$ とおくと，これが条件を満たすことがわかる.

質問 2： $\mathbb{R}^2$ の単連結領域が $\mathbb{R}^2$ と微分同相であることを示すのに，リーマンの写像定理以外の方針はありますか.

お答え： 山田は（勉強不足で）知りません.

質問 3： $\mathit{\Omega}, \mathit{\Lambda}$ が交代行列の場合，解 X ha $\det|X| = 1$（原文ママ：$\det X$ と書くか $|X|$ と書くかどちらかでは？）の直交行列になるのを見て，リー環とリー群の対応を思い出しました．授業でやった 2 つ以外にも特別な場合があるのでしょうか.

お答え： 一般に，リー環とリー群の対応そのものです．実際，方程式 $F_u = F\mathit{\Omega}$, $F_v = F\mathit{\Lambda}$ の係数行列 $\mathit{\Omega}, \mathit{\Lambda}$ が行列からなるリー環に値をとり，初期条件も同じリー環に値をとるなら，解 F は対応するリー群に値をとります．リー群とリー環の対応の定義からすぐにわかります.

質問 4： n 変数においても可積分条件は $d\omega + \omega \wedge \omega = 0$ ですか?

お答え： はい.