2018 年 7 月 3 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論 B （MTH.B402）講義資料 4

前回までの訂正

- 講義資料 3, 2 ページ，1 行目：解 X ha ⇒ 解 X は
- 講義ノート 26 ページ，下から 2 行目：orientations ⇒ orientation
- 講義ノート 27 ページ，9 行目：

$$e^{2\sigma}\bigl((u_\xi^2+v_\xi^2)\,d\xi^2+2(u_\xi v_\eta+u_\eta v_\xi)\,d\xi\,d\eta+(u_\eta^2+v_\eta^2)\,d\eta^2\bigr)$$
$$\Rightarrow\qquad e^{2\sigma}\bigl((u_\xi^2+v_\xi^2)\,d\xi^2+2(u_\xi u_\eta+v_\xi v_\eta)\,d\xi\,d\eta+(u_\eta^2+v_\eta^2)\,d\eta^2\bigr)$$

- 講義ノート 27 ページ，(3.5) 式の 2 番目：$u_\xi v_\eta+u_\eta v_\xi=0$ ⇒ $u_\xi u_\eta+v_\xi v_\eta=0$
- 講義ノート 27 ページ，12 行目：$(v_\xi,v_\eta)=\varepsilon(-u_\eta,u_\xi)$ ⇒ $(u_\eta,v_\eta)=\varepsilon(-v_\xi,u_\xi)$
- 講義ノート 27 ページ，15 行目：$\det\begin{pmatrix}u_\xi & u_\eta\\ -\varepsilon u_\eta & \varepsilon u_\xi\end{pmatrix}$ ⇒ $\det\begin{pmatrix}u_\xi & -\varepsilon v_\xi\\ v_\xi & \varepsilon u_\xi\end{pmatrix}$
- 講義ノート 28 ページ，1 行目：Equations 3.4 ⇒ Equations (3.4)
- 講義ノート 28 ページ，19 行目：consists of ⇒ consisting of
- 講義ノート 28 ページ，20 行目：compatible of ⇒ compatible to
- 講義ノート 29 ページ，一番下：$p_{vv}=-\sigma_v p_u+\sigma_u p_v+N\nu$ ⇒ $p_{vv}=-\sigma_u p_u+\sigma_v p_v+N\nu$
- 講義ノート 30 ページ，1 行目：bases ⇒ basis
- 講義ノート 30 ページ，9 行目：$e^{2\sigma}b=\cdots=\sigma_v e^{2\sigma}$ ⇒ $e^{2\sigma}b=\cdots=-\sigma_v e^{2\sigma}$
- 講義ノート 33 ページ，5 行目：σ, L, M, N C^∞-functions ⇒ and let σ, L, M, N be C^∞-functions
- 講義ノート 36 ページ，3 行目：$(\dot x)^2+(\dot y)^2=1$ ⇒ $(\dot x)^2+(\dot z)^2=1$

質問と回答

質問 1： ガウスの方程式とコダッチの方程式は何故そのような名前がつけられたのか，経緯が気になりました．同じ条件式から同時に出てくる 3 つの式ですが，別の名前がついていたので．

お答え： 現代の目から見るとそうですね．初めて見つける立場からすると，どうでしょう．

質問 2： 等温座標系の各種特殊性は 2 次元の場合にのみ成り立つということは，実 2 次元においては概複素構造が可積分である，ということに起因すると考えて良いのでしょうか．

お答え： 「起因」という因果関係についてははなんとコメントすべきかわかりませんが，等温座標系の存在と「接平面を反時計方向に 90 度回転する」という概複素構造の可積分性は同値です．実際，このようなテンソルに関する Nijenhuis テンソルを計算すると，2 次元というだけで 0 になることがわかります．

質問 3： 等温座標系は標準計量 $g_0=du^2+dv^2$ に conformal ですが，こんな感じで Riemann 計量 g, h に対し，$g\sim h \Leftrightarrow g$ と h は conformal，とすることによって 2-dim R-mfd を分類すると，その同値類で面白い性質をみつけることができますか？等温座標系はいろいろありそうですが．

お答え： 等温座標系の存在は「任意の 2 次元リーマン多様体は局所的にはユークリッド平面と共形的」であること．このような性質をもつ（一般次元の）リーマン多様体は「共形平坦リーマン多様体」と呼ばれ，20 世紀初頭から盛んに研究されています．リーマン幾何学の教科書にある Weyl の共形テンソルや Schouten テンソルはこういう文脈で出てきます．一方，多様体全体で 2 つの計量が共形的であるときこれらに共通の性質を調べるのが共形幾何．たとえば，任意の 2 次元リーマン多様体は，ガウス曲率一定のリーマン多様体と共形同値．一般次元では，たとえば山辺の定理．共形微分幾何で検索すると最近の結果までさまざまなものが見つかるはず．