2019 年 9 月 26 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一（MTH.B211）講義資料 1

講義概要

■重要なポインタ

- `http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2019/geom-1/` (この授業の公式ページ)
- `http://www.official.kotaroy.com/class/2019/geom-1/` (この授業のページ; ミラーサイト)
- `http://www.ocw.titech.ac.jp/` (東工大 OCW)
- 本館 2 階 231 (山田の部屋；提出物ポストはここ)
- 本館 3 階 332B (数学事務室；答案返却など)

■科目名など　幾何学概論第一 (MTH.B211)（木曜日・3/4 時限・理学院数学系）

■担当者　山田光太郎（理学院数学系）kotaro@math.titech.ac.jp

■講義の概要　線形代数学，微分積分学から必要な事項を整理したのち，以下の事項を学ぶ：平面曲線のパラメータ表示・弧長・曲率・曲率の幾何学的意味・フルネの公式・平面曲線の基本定理・空間曲線の曲率と捩率・空間曲線の基本定理．平面・空間曲線の微分幾何学の基本事項を通して，これまでに学んだ線形代数学・微分積分学が使われる場面を体験し, 変換・不変量といった現代幾何学の基本的な概念を知る.

■到達目標　平面曲線, 空間曲線の微分幾何学の基本的な事項を学ぶ．(1) 曲線の曲率や捩率を合同変換やパラメータ変換で不変な量としてとらえ，それが曲線を決定すること (曲線論の基本定理) を理解する．(2) 閉曲線の位相幾何学的な性質と曲率の関係を通して，局所的な概念と大域的な概念の違いを知る．(3) これらの理論を具体例の計算によって確認する．本講義の続編として「幾何学概論第二」が第 4 クォーターに開講される.

■教科書　梅原雅顕・山田光太郎『曲線と曲面』改訂版（裳華房）

正誤表：`http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/publication/surface-jp.html`

■成績評価の方法

- **授業日程**の項にある定期試験を**受験**することが単位を得るための必要条件です．(十分条件ではありません)．やむを得ない理由で試験を受けられない方は（可能な限り）事前に電子メイルにて講義担当者までご連絡ください．連絡なしに試験に欠席した方は，原則として単位を得る権利を失います.
- 成績は**主として定期試験**の得点で決めます．定期試験の成績が余りよくない場合（とくに定期試験だけでは不合格になってしまう場合）に以下の「提出物」の成績を考慮します.
- 授業後に (1) 講義資料にあげた**問題**のうち一つの解答 (2 点); (2) **前回までの授業内容に対する質問**あるいは**講義・講義資料の誤りの指摘** (3 点) を提出してください．これを 1 回 5 点満点で評価します.

  提出方法　所定の用紙に記入し，授業の翌日 **金曜日の 17 時 00 分**までに山田の部屋（本館 2 階 231）の前のポストに提出してください．所定の用紙と異なる形式のものは受け付けません.

  キーワード　毎回，講義のあとに，OCW に登録したメイルアドレス（既定値は m アドレス）に**キーワード**を送信します．提出用紙の該当欄にキーワードを記入してください.

注意　いただいた質問にはできる限り回答します．なお，質問および回答の内容は**公開します**のでご了承下さい．とくに質問の文章はできる限り原文を尊重しますので，誤字に気をつけてください．

おまけ　提出用紙には授業に関する感想，意見の記入欄を設けます．いただいた御意見は個人が特定できない形で公開いたします．なお，ご意見等の内容は成績に一切影響いたしません．

- いわゆる出席点はつけません．したがって出席もとりません．しかし，出席と関わりなく **授業時間中に連絡したことは伝わっている** とみなします．
- 試験後，答案を返却し，成績を確認していただきます．採点，成績に関する**クレイム・質問は期間を限って受付け**ます．なお，成績に関する議論は，提出されたものに**書かれたもののみを材料**とします．

■授業日程

		授業内容
09 月 26 日	1	準備
10 月 03 日	2	平面曲線 (§1)
10 月 10 日	休	火曜日授業
10 月 17 日	3	曲率とフルネ方程式 (§2)
10 月 24 日	4	閉曲線と回転数 (§3)
10 月 31 日	5	空間曲線 (§5)
11 月 07 日	6	空間曲線の基本定理 (§5)
11 月 14 日	7	補足
11 月 21 日	試	定期試験

1 準備

■内積 この講義では標準的な**内積** "$\cdot$" が与えられた $\mathbb{R}^n$ のことを**ユークリッド空間**[*1]という．ベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ を**列ベクトル**と見なしたとき $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = {}^t\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}$ である．ただし右辺の ${}^t\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v}$ の**転置**[*2]を表し，右辺の積は行列の積を表す．これを用いて，ベクトル $\boldsymbol{v}$ の**大きさ**を $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}$ と定める．また，$\mathbb{R}^n$ の 2 点 P, Q の**距離**を $d(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = \bigl|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\bigr| = \bigl|\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}\bigr|$ で定める．ただし O は**座標原点**である．

■直交行列 実数を成分とする n 次正方行列 A が**直交行列**[*3]である，とは ${}^tAA = A{}^tA = I (= n$ 次単位行列$)$ が成り立つことである．

問 1.1. 次数 n の 実正方行列 A が直交行列であることと，次の各々は同値であることを示しなさい：

- 任意のベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ に対して $(A\boldsymbol{v}) \cdot (A\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$.
- 任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して $|A\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{v}|$.
- A の n 個の列ベクトルが $\mathbb{R}^n$ の**正規直交基**をなす.

問 1.2.
- 直交行列の行列式の値は 1 または -1 であることを示しなさい.
- 次を確かめなさい：
  - 単位行列は直交行列である.
  - 2 つの n 次直交行列の積は直交行列になる.
  - 直交行列は正則でその逆行列は直交行列である.

  このことを「n 次直交行列全体の集合 $\mathrm{O}(n)$ は行列の乗法に関して群をなす」といい，$\mathrm{O}(n)$ を n **次直交群**ということがある.
- n 次直交行列のうち行列式が 1 であるものの全体 $\mathrm{SO}(n)$ は群をなすことを確かめなさい．$\mathrm{SO}(n)$ を n **次特殊直交群**という.

問 1.3.
- 直交行列の固有値は絶対値 1 の複素数であることを示しなさい.
- **奇数次**の直交行列で行列式が 1 であるものの固有値の 1 つは 1 であることを示しなさい.
- 行列 $A \in \mathrm{SO}(3)$ に対して，次をみたす $P \in \mathrm{SO}(3)$ と $\theta \in \mathbb{R}$ が存在することを示しなさい.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

- A, $B \in \mathrm{SO}(3)$ が，固有値 1 の固有空間を共有するならば $AB = BA$ であることを示しなさい.

■等長変換 写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が**等長変換**であるとは，各 $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}^n$ に対して次が成り立つことである[*4]：

$$d\bigl(f(\mathrm{P}), f(\mathrm{Q})\bigr) = d(\mathrm{P},\mathrm{Q}).$$

2019 年 9 月 26 日

[*1] 内積：an inner product; ユークリッド空間：the Euclidean space; 列ベクトル：a column vector.

[*2] 転置：transposition ;（ベクトルの）大きさ：the length (norm) of the vector; 距離：the distance; 座標原点：the origin.

[*3] 直交行列：an orthogonal matrix; 単位行列：the identity matrix; 正規直交基：an orthonormal basis.

[*4] 等長変換：an isometry; 合同変換：a congruence; 向きをたもつ（反転する）：orientation preserving (reversing)

問 1.4. ベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\mathbb{R}^n$ の点（原点を起点とする位置ベクトル）とみなすとき，

$$f\colon \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \longmapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \qquad (A \in \mathrm{O}(n), \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n) \tag{1.1}$$

であたえられる f は $\mathbb{R}^n$ の等長変換である．このことを示しなさい．

定理 1.5. $\mathbb{R}^n$ の等長変換は (1.1) の形に限る．

定義 1.6. $\mathbb{R}^n$ の等長変換を**合同変換**ということもある．とくに (1.1) の形をした合同変換のうち $A \in \mathrm{SO}(n)$ となるものを**向きを保つ合同変換**，そうでないものを **向きを反転する合同変換**という．

問 1.7. $\mathbb{R}^n$ の等長変換は $f\colon \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ $(A \in \mathrm{O}(n), \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n)$ の形となることを次により示しなさい：(1) 等長変換 f に対して $\boldsymbol{b} := f(\boldsymbol{0})$，$g(\boldsymbol{x}) := f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}$ とおくと $g(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ である．(2) $|g(\boldsymbol{x})| = |\boldsymbol{x}|$，$|g(\boldsymbol{y}) - g(\boldsymbol{x})| = |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|$ が成り立つ．(3) $g(\boldsymbol{x}) \cdot g(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ が成り立つ．（ヒント：$2\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = |\boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{y}|^2 - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^2$.）(4) g は線形写像である．（ヒント：$g(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{y})$，$g(\alpha\boldsymbol{x}) - \alpha g(\boldsymbol{x})$ の大きさ.）(5) 線形写像 g の表現行列を A とおくと $A \in \mathrm{O}(n)$.

■多変数関数の微分法　ユークリッド空間 $\mathbb{R}^m$ の領域（連結な開集合）U から $\mathbb{R}^n$ への写像 f を考える：

$$f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n. \tag{1.2}$$

問 1.8. とくに $n = 1$ のとき，(1.2) の f が C^r-級（$r = 0, 1, 2, \dots, \infty$）であることの定義を述べなさい．

この講義では，簡単のため C^∞-級のことを**なめらか**，あるいは**可微分**という[*5].

定義 1.9. 写像 (1.2) を $f\colon (x_1, \dots, x_m) \mapsto \bigl(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m)\bigr)$ と成分表示したとき，f が C^r-級 $(r = 0, 1, \dots, \infty)$ である，とは $j = 1, \dots, n$ に対して $f_j\colon U \to \mathbb{R}$ が C^r-級であること，と定める．

定義 1.10. 写像 (1.2) が C^1-級であるとき，点 $p \in U$ における f の**微分**または**ヤコビ行列**を[*6]

$$df_p = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_m}(p) \end{pmatrix}$$

なる $n \times m$ 行列と定める．とくに $n = m$ のとき，$J_p := \det(df_p)$ を f の p における**ヤコビ行列式**という．

■合成関数の微分法（チェイン・ルール）　写像 $f\colon \mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}^n$, $g\colon \mathbb{R}^n \supset V \to \mathbb{R}^l$ $\bigl(f(U) \subset V\bigr)$ がいずれも C^1-級のとき，合成写像 $g \circ f$ の微分は次で与えられる：

$$d(g \circ f)_p = \bigl(dg_{f(p)}\bigr)\bigl(df_p\bigr) \tag{1.3}$$

問 1.11.
- 式 (1.3) の右辺の行列の積が意味をもつことを確かめなさい．
- これらの写像を $f(x_1, \dots, x_m) = \bigl(y_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n(x_1, \dots, x_m)\bigr)$，$g(y_1, \dots, y_n) = \bigl(z_1(y_1, \dots, y_n), \dots, z_l(y_1, \dots, y_n)\bigr)$ と書くとき，(1.3) は次と同値であることを確かめなさい：

$$\frac{\partial z_j}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial z_j}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \qquad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, l).$$

[*5] なめらか：smooth; 可微分：differentiable.

[*6] 微分：the differential; ヤコビ行列：the Jacobian matrix; ヤコビアン：the Jacobian.

■陰関数定理

定理 1.12 (逆関数定理)**.** 領域 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上で定義された C^∞-級写像 $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ が，点 $p \in U$ において $J_p = \det(df_p) \neq 0$ を満たしているとする．このとき，U における p の近傍 V が存在して

$$f|_V\colon V \longrightarrow f(V) \subset \mathbb{R}^n$$

は全単射，かつその逆写像 f^{-1} が C^∞-級となる．

問 1.13.
- $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ の開区間 I 上の可微分関数 $f\colon I \to \mathbb{R}$ が $f'(x) \neq 0$ を I 全体で満たしてるならば，$f(I)$ 上で定義された f の可微分な逆関数 $f^{-1}\colon f(I) \to I$ が存在する．このことの理由を述べなさい．
- $\mathbb{R}^n$ の領域 U 上で定義された可微分写像 $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ のヤコビ行列式が U の各点で 0 でなかったとしても，$f(U)$ 全体で定義された逆写像が存在しないことがある．そのような例を一つ作りなさい．

定義 1.14. 領域 $U, V \subset \mathbb{R}^n$ の間の写像 $f\colon U \to V$ が**微分同相写像**であるとは，次を満たすことである[*7]：

- f は全単射である．
- f は U で可微分（C^∞-級）である．
- f^{-1} は V で可微分（C^∞-級）である．

この言葉を用いれば**ヤコビ行列式が 0 でない可微分写像は局所的に微分同相写像である**といえる．

問 1.15. 微分同相写像 $f\colon \mathbb{R}^n \supset U \to V \subset \mathbb{R}^n$ に対して $d(f^{-1})_q = \bigl(df_p\bigr)^{-1}$ $\bigl(q = f(p)\bigr)$ を示しなさい．

定理 1.16 (陰関数定理の特別な場合)**.** 領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への可微分写像 $F\colon U \ni (x,y) \mapsto F(x,y) \in \mathbb{R}$ と $(x_0, y_0) \in U$ が

$$F(x_0, y_0) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

を満たしているとき，(x_0, y_0) の近傍 V と x_0 を含む $\mathbb{R}$ の区間 I, I 上で定義された可微分関数 $f\colon I \to \mathbb{R}$ が存在して，$V \cap \{(x,y) \,|\, F(x,y) = 0\} = \bigl\{\bigl(x, f(x)\bigr) | x \in I\bigr\}$ が成り立つ．とくに $F(x, f(x)) = 0$ が成り立つ．

問 1.17. 写像 $(x,y) \mapsto (x, F(x,y))$ に逆関数定理を適用することにより，定理 1.16 を示しなさい．

問 1.18. 定理 1.16 の関数 f の微分は次を満たすことを確かめなさい：

$$\frac{df}{dx}(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} \qquad \bigl(y = f(x)\bigr).$$

問 1.19. $\mathbb{R}^2$ の領域 U 上で定義された可微分関数 $f(x,y)$ に対して

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

を対応させる作用素 Δ を**ラプラシアン**あるいは**ラプラス作用素**という[*8]．いま，極座標 $(r, \theta) \mapsto (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ で f を表示するとき Δf を (r, θ) に関する偏導関数で表すと

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

[*7] 微分同相写像：a diffeomorphism; 逆関数定理：the inverse function theorem; 陰関数定理：the implicit function theorem
[*8] ラプラシアン：the Laplacian

となることを示しなさい．さらに，3 変数関数で同じことを試みなさい．

■いくつかの初等関数

三角関数と逆三角関数

- $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, $\operatorname{cosec} x = \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$, $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$.
- $y = \cos^{-1} x \Leftrightarrow x = \cos y$ かつ $0 \leqq y \leqq \pi$.
- $y = \sin^{-1} x \Leftrightarrow x = \sin y$ かつ $-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$.
- $y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow x = \tan y$ かつ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

双曲線関数

- $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$：hyperbolic cosine; 双曲的余弦（そうきょくてきよげん）
- $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$：hyperbolic sine; 双曲的正弦（そうきょくてきせいげん）
- $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$：hyperbolic tangent; 双曲的正接（そうきょくてきせいせつ）

問 1.20.
- 逆三角関数の微分公式を作りなさい．
- $\cosh x$ は x の偶関数，$\sinh x$, $\tanh x$ は奇関数であることを示し，これらの関数のグラフを描きなさい．
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$ ($\operatorname{sech} x = 1/\cosh x$).
- 逆関数：$x = \sinh y$ なら $y = \log(x + \sqrt{1+x^2})$， $x = \cosh y$, $y \geqq 0$ なら $y = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$.
  $x = \tanh y$ なら $y = \dfrac{1}{2} \log \dfrac{1+x}{1-x}$.
- 高等学校で学んだ三角関数の公式に対応する双曲線関数の公式を作りなさい．

問題

1-1 行列 $A \in \mathrm{SO}(2)$ とベクトル $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ に対して，

$$\rho_{A,\boldsymbol{a}} \colon \mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \rho_{A,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) := A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$$

により $\mathbb{R}^2$ の変換 $\rho_{A,\boldsymbol{a}}$ を定める．任意の $A \in \mathrm{SO}(2) \setminus \{I\}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ に対して，$P \in \mathrm{SO}(2)$ と $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$, 実数 θ で次を満たすものが存在することを示しなさい[*9]．ただし I は単位行列を表す．

$$\rho_{P,\boldsymbol{p}}^{-1} \circ \rho_{A,\boldsymbol{a}} \circ \rho_{P,\boldsymbol{p}} = \rho_{R_\theta,\boldsymbol{0}} \qquad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

1-2 正の定数 a, c に対して，次のような $\mathbb{R}^2$ 全体で定義された 2 変数関数を考える：

$$F(x,y) = (x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 - c^2.$$

- ある正の数 y_0 が存在して $F(0, y_0) = 0$ となるための，定数 a と c の条件を求めなさい．
- このとき，ある関数 f が存在して，$(0, y_0)$ の近傍 V で $C = \{(x,y) \mid F(x,y) = 0\} \cap V$ は $y = f(x)$ のグラフでかけることを示しなさい．
- さらにそのとき $f'(0)$ の値を求めなさい．

[*9] おまけの問題：$A \in \mathrm{O}(2)$ で $\det A = -1$ の場合はどうか．また 3 次元の場合はどうか．