

2019年10月3日(2019年10月17日訂正)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 (MTH.B211) 講義資料 2

お知らせ

- 提出物はお返します(持っていて邪魔なので). 返却された用紙のコメントは読めないかもしれませんが, 山田用のメモなのでお許してください. コメント・回答はこの用紙にあるものが正式なものです.
- 来週10月10日(木曜日)は火曜日の時間割になりますので, 次回は10月17日になります.
- 今回に限り, 提出物の締め切りを10月11日(金)17:00とします. なお, 11日は工大祭準備のため休講なのでご注意ください.

前回の補足

- 提出物で「題意」という語を使った方が数名いらっしゃいました. 残念ながら山田は「題意」の意味を知りません(広辞苑には「題の意味するところ」とあります). お使いになっている方は全員「何かの証明ができた」という意味のようなので「結論が得られた」と言い換えられます. 当方, 浅学ゆえ「題意」という語に「結論」という意味が含まれている, という根拠を知りません. どなたかご存知でしたらお知らせください.【注】遠回しに言っていますが, 誤用でないかと思っています. どうしても「題意」を使いたいかたは, その語に「結論」という意味が含まれている, というエビデンスをお願いします.

前回までの訂正

- 講義中に陰関数定理を紹介したところで, $F(x, y) = 0$ を $y = f(x)$ と「解いた」ときの微分公式(板書): $f'(x) = -\frac{F_y(x, f(x))}{F_x(x, f(x))} \Rightarrow f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$ (分母と分子を逆に書いた).
- 講義中の問題1-2のコメントで, 「 $a = c$ のときまづい」と言ったところご指摘がありましたが, $a^2 = c$ のときです. ひょっとしたら, 講義では $F(x, y) = (x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 - c^4$ と書いたかも知れませんが, 「2点 $(\pm a, 0)$ からの距離の積が c 」と上にかいた F について「 $F(x, y) = 0$ を満たす」が同値です.
- 上のコメントにしたがって, 講義資料1, 6ページ, 問題1-2の F の定義式の最後の項: $c^2 \Rightarrow c^4$

授業に関する御意見

- 後ろの方の席では声が少し聞こえにくかったです. できるだけ前の方に座るようにはしますが, 座れないこともあるかもしれません. 山田のコメント: ごめんなさい. PA使いますか?
- 声が小さくて聞こえづらい(原文ママ: づらい?) のでマイクを使うなどしてください. 山田のコメント: 試してみます.
- 板書の字が読めないことがある. 山田のコメント: Sorry.
- 部屋が寒かったです. 山田のコメント: コントローラは後方にあります. 適当に調節してください.
- 問題の解答はあるでしょうか? 山田のコメント: 授業時間に解説します.
- オイラーの公式はきちんと扱われてこなかったのが, 少し解説をして欲しいです. 山田のコメント: どの「オイラーの公式」?
- 再び行列の勉強をしたと思ったのですが, おすすめの参考書等がありますか? 山田のコメント: どの程度のもを想定しているかわかりませんが, 一度線形代数をきちんと学んでいるなら, 佐武一郎「線型代数学」(裳華房)なんてどうでしょう.
- 合同という概念の汎用性の高さがよく分かった. 山田のコメント: 何と何に使えましたか(汎用性はそういう意味ですよ).
- 固有ベクトルの向きが固有値が1なら不変(大きさも不変)であって-1な反転するところからどのような変換か推測できるといふのは今まで使ったことのない考え方でした. 陰関数定理や線型代数の諸概念をイメージできるようにしていきたいです. 山田のコメント: 何回も使っているうちにイメージはついてくるものだと思います. 実数の固有値に関する固有ベクトルの向きは(固有値の値によらず)その線型変換で不変だと思いますが(それが固有値の定義).
- 久しぶりの数学の授業だったので, 細かいふくしゅう(原文ママ: 復讐?) がたずかりました. 山田のコメント: よかった.

- 質問しようと思って書くと意外と解決してしまうので、中身のある問いを立てるまでに時間がかかりました (私の質問に中身があるかはわかりませんが)。 山田のコメント: それを狙いなんですよ。
- 提出が翌日なのでそれまでに配布資料を全部理解できません。 山田のコメント: 残念。第1回は「復習」ですすでに学んだ事実で後に用いるものをまとめているので少し盛りだくさんでしたが、だんだん減ります。
- 前提知識となる定理などの紹介をもう少し丁寧にしてもらえると助かります。 山田のコメント: どのあたりでしょう。やりすぎると本題に入れないので許容範囲を教えてください。たとえば「実対称行列の固有値は実数で、直交行列で対角化できる」なんていうのはあたりまえとして通り過ぎてよいですか?
- 幾何という名前の科目は初めてで不安だったのですが、解析で扱った事柄などが主で入るのに抵抗はなくよかったです。今までの解析や位相と少し似ているところなどを見出していただければいいなと思いました。 山田のコメント: 解析も代数も位相もすべてまんべんなく使います。その上で幾何学の「考え方」が伝わるとよいです。
- 難しそうだなと感じます。 山田のコメント: そうですか? ● よろしくお願いします。 山田のコメント: こちらこそ。
- 楽しいです。 山田のコメント: me, too. ● がんばります 山田のコメント: どうぞ。
- 特にないです。 山田のコメント: そう?

質問と回答

質問 1: 平面上の三角形は 6 次元で表され、合同で同じものと見なすと 3 次元分減るといってお話は納得できたのですが、試しに違う例で考えたらよくわからなくなりました。以下考えです: 平面向きのある線分を平行移動で同一視したら、2 次元ベクトルになるのでは? と思いました。しかし、平面向きの線分は平面の 2 点が決まればその間を結ぶのが定まるということで $2 \times 2 = 4$ 次元、これに加えて向きがあるので +1 次元で 5 次元かなと考えました。そこで平行移動の同一視をして 1 次元減らしても 4 次元になり、2 次元ベクトルとはなりません。どこに議論の間違いがあるか、ヒントを頂ければと思います。

お答え: 惜しい。誤りは 2 箇所。(1) 向きの自由度を 1 次元としたこと。問題の状況では、向きをもつ線分は反対向きの線分に連続的に変形できない (離散的) ので、向きの自由度は次元 0。(2) 平行移動全体は 1 次元ではなく 2 次元。これで正しい結論がでませんか? とところで、「平面上の円の自由度は 3 (中心と半径)」なので合同なものを同一視すると自由度 0 になるように思えますが、1 次元の自由度があります (半径)。なにを間違ったのでしょうか。

質問 2: $A \in \text{SO}(n)$ について、 $A = (a_1, \dots, a_n)$ と書くと $\|a_1\| = 1$ とならなければならないので a_1 の自由度は $n - 1$, $\|a_2\| = 1$, $a_1 \cdot a_2 = 0$ なので a_2 の選び方の自由度は $n - 2$ 。同様につづけると $\text{SO}(n)$ の自由度は $\frac{n(n-1)}{2}$ となるのではないかと。お答え: その通り (「条件がすべて独立である」ことを確かめる必要がある)。

質問 3: 講義中に楕円がなめらかな曲線であることを説明する際、 $F(x_0, y_0) = 0$ である (x_0, y_0) で $(F_x(x_0, y_0), F_y(x_0, y_0)) \neq (0, 0)$ ならば (x_0, y_0) の近くでなめらかだとおっしゃっていたと思います。 (x_0, y_0) での法線ベクトルが $(F_x(x_0, y_0), F_y(x_0, y_0))$ というのをグラフィックの処理が何かで聞いたことがあるのですが、これは「法線ベクトルが零ベクトル、つまり法線の方向が定まらないから接線の方向も定まらず、なめらかであるとは言えない」という解釈も可能でしょうか。お答え: 可能です。法線ベクトルの式は示せますか?

質問 4: (4 頁前半に関連する内容として) \mathbb{R}^n の凸領域 U, V に対して、直線を保つ写像 $f: U \rightarrow V$ があったとき f は線型写像になりますか? ここで直線を保つとは、任意の $a, b \in U$ と $t \in [0, 1]$ について $f(ta + (1-t)b) = tf(a) + (1-t)f(b)$ となる写像です。(加藤十吉「位相幾何学」を読んでいたときに出了た疑問です)。

お答え: 「直線を保つ」の定義が適切か気になります。直線のアファイン・パラメータまで保つことを仮定してよい? いずれにせよ、直線を保つ写像はアファイン写像 ($f(x) = Ax + a$ の形) になります。「射影幾何学の基本定理」。

質問 5: 「 $dF = (F_x, F_y)$ が F の等高線に直交する」とありましたが、一般に曲線の等高線とはどういったものなのでしょうか。数学的な定義はなく気持ちの問題ですか?

お答え: 「曲線の等高線」ではなく「関数の等高線」。 \mathbb{R}^2 の領域 D 上で定義された関数 F の高さ $c (c \in \mathbb{R})$ の等高線とは、集合 $\{(x, y) \in D; F(x, y) = c\}$ のことです。

質問 6: C^∞ 級関数の定義のお話で「無限回微分可能」という意見がでて、無限階微分はしないだろうというお話がありました。私の中では「任意階の導関数が存在 (= 任意回微分可能)」、「任意階の導関数が連続」というものが浮かび、でも「連続 \Rightarrow 微分可能だから...」(原文ママ) と考えるとわからなくなっていました。 C^∞ 級関数の定義としては「任意回の導関数が連続」で十分なのでしょうか。また、「無限」という言葉はあまり定義に用いないということだったので、他にも定義で「無限」を使いそうになるが適切でない例があればいくつか教えていただきたいです。お答え: 前半: 「連続 \Rightarrow 微分可能」は間違い。「 C^∞ 級」の定義は「すべての負でない整数 k に対して C^k 級」。後半: ε - δ 。

質問 7: 陰関数定理の中で、条件として $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ があるのはなぜでしょうか? この条件を付けないと $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ が全単射にならない、ということでしょうか?

お答え: この文脈では、仮定があってもなくても $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ は一般には全単射になりません。仮定の必要性は $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1, (x_0, y_0) = (1, 0)$ で何がおきるか考えればわかる。

質問 8: 陰関数定理自体は一年時に扱われましたが、導出などの厳密な議論を一切なされなかったのが、導出の仕方を知りたいです。また、陰関数定理の近傍 V は $V \subset \mathbb{R}^2$ でとっているのか $V \subset \mathbb{R}$ でとっているのかが分かりません。

お答え: 前半: 自明ではないし、この講義でやったら本題に入れないので適切な教科書を見ること。後半: 講義資料 1, 5 ページ, 定理 1.12 ですと「 U における p の近傍 V 」とあります。 U が何者かわかればわかるはず。

質問 9: 問 1-2 で表される曲線について、授業では $c = a$ のときに「まずい」とおっしゃっていましたが、レポートの内容を考えると、まずいのは $c = a^2$ の場合ではないでしょうか。このとき、曲線は「 ∞ 」のようになり、点 $(0, 0)$ の近傍で $y = f(x)$ と表せず、冒頭に挙げた「なめらか」の定義では不十分ということになり、次回以降に繋がっていくのではないのでしょうか。お答え: はい。そうです。

質問 10: 今回の講義にあった仮の定義では「 ∞ 」のような形の曲線がなめらかな曲線と定義されないという話について、直感的には交点を「/」と「\」に分ければ問題なくなめらかだとみなせそうだと思うのですがそのように線を分けることが厳密に行なうのが難しいという理解であってますか?

お答え: 今回例示しますが、曲線を(正則)パラメータ表示をするとこのような形が自然に現れることがあります。陰関数表示の特異点にはなっていますが、パラメータ表示では特異点になっていない例です。

質問 11: レムニスケート等、交叉する点をもつ曲線も含めて滑らかであるかどうかを判定するためには、上手いパラメータ t によって、点 $(x(t), y(t))$ を図形上で動かしたときに、その点が図形上のすべての点を動きかつ $x(t), y(t)$ は滑らかで、かつ $\dot{x}(t), \dot{y}(t)$ が同時に 0 にならない(尖らないための条件になっているか微妙に思います)ことが 1 つの十分条件となっているのではないかと考えました。また、別の判定法として、曲線上の任意の点に対し、そこから延びる経路の任意のものに対して、ある自身以外の経路(その点から延びるもの)が存在してその 2 本だけを見るとその点において C^∞ -級関数と合同になるならばなめらかであるというものを考えてみました。

お答え: 前半: 今回述べる「正則なパラメータ表示」。後半: よくわかりません。1 点で 3 本以上のピースが交わっている場合(たとえば「*」)は? 前半の「(...)」の部分少し解説が必要です: $(\dot{x}, \dot{y}) \neq (0, 0)$ ならば尖りませんが、逆は正しくありません。ところで「 C^∞ 級関数と合同」は「 C^∞ 級関数のグラフと合同」という意味ですね。

質問 12: 端点を含む線分はなめらかかどうか? お答え: 閉区間で定義された関数が C^∞ -級である、ということはどう定義しますか?(次の定義が標準的だと思います):【定義】関数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が C^∞ -級であるとは、 $[a, b]$ を含む開区間 (a', b') ($\supset [a, b]$) と C^∞ -級関数 $\tilde{f}: (a', b') \rightarrow \mathbb{R}$ で $f(x) = \tilde{f}(x)$ が $x \in [a, b]$ に対して成り立つものが存在すること; この定義に従うと端点をもつ線分はどうですか?

質問 13: 3次元での三角形の情報量は 9, そこから合同なものを同一視すると情報量は 3 になる。つまり、変換が 6 個分を吸収して、その内訳は軸の方向の設定 2 つぶん、回転角分で 1 つ、平行移動分で 3 つと授業中におっしゃられていましたが、この考えを、より高次元で拡張した時に、わからなくなった。また、二次元での回転と比べたとき、一貫性が低いようにも感じられた。回転の解釈をより詳しく教えてほしい。

お答え: 「情報量」は別の意味で使われることが多い。 \mathbb{R}^2 の回転は直交行列で表される。 $SO(2)$ の次元は 1。 $SO(3)$ の次元は 3。とくに $A \in SO(3)$ が表す線型変換は原点を通る直線を軸とする回転と解釈できる。一般に $SO(n)$ の次元は $n(n-1)/2$ 。次元が上がると複数の回転の「合成」と解釈できる。キーワード「直交行列の標準形」。

質問 14: 聞き間違いかもしれませんが、3次元の等長変換は回転軸(パラメータ 3 つぶん; 原文ママ)と平行移動(パラメータ 3 つ分)のパラメータ 6 つぶんだと言っていたと思うのですが、僕のイメージでは回転軸、回転量、平行移動に感じてしまいます。これは、回転軸と回転量を合わせて回転であり、回転がパラメータ 3 つぶんという認識でよいのでしょうか。お答え: そう。最初の「回転軸」という言葉が間違っています。講義では後半のように述べたつもり。「認識」なんていう難しいことばを使わなくても、そう。

質問 15: $O(n)$ のうち行列式が -1 の方の集合になにか名前はついてますか。

お答え: いいえ。 $SO(n)$ は $O(n)$ の部分群になるのですが、 \det が -1 であるような直交行列全体は群にならないので。

質問 16: 1-固有値 $\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ の部分で固有値が何を意味するのか、なぜ 1 に着目するのかが分かりませんでした。

お答え: 固有値の定義は大丈夫ですね。行列 A の 1-固有ベクトルは線型変換 $x \mapsto Ax$ の固定点。

質問 17: 問 1-1 のように書けると何か良いことがあるのかお尋ねしたいです。お答え: 「平面の原点を中心とする回転と平行移動の合成は、ある点を中心とする回転である」ということが言える。嬉しくないですか?

質問 18: 3 次の直交行列の固有値の一つは 1 であるのがなぜなのかわかりませんでした。絶対値が 1 で共役だとしても -1 になることもあるのではないのでしょうか。

お答え: 行列式が 1 としています。(1) 直交行列の固有値の絶対値は 1。(2) 固有多項式 $f(t)$ は実係数の 3 次式。[I]: (2) から、虚の固有値 λ をもつならば、 $\bar{\lambda}$ も固有値。残りの固有値を μ とおくと $\lambda\bar{\lambda}\mu = 1$ なので (1) より $\mu = 1$ 。[II] すべての固有値が実なら (1) からそれらは ± 1 。行列式が 1 なので 3 つがすべて -1 となることはない。

質問 19: $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ が折り返しというのを先生は固有値を求め、(図省略) が移動せず、(図省略) が 180° 移動するからとおっしゃっていましたが、それだけで折り返しと認めるのがしっくりきません。詳しく説明していただきたいです。 $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & \sin \theta/2 \\ -\sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & -\sin \theta/2 \\ \sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix}$ として自分は考えました。

お答え: 1-固有ベクトル $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$, と -1-固有ベクトル $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ は \mathbb{R}^2 の正規直交基を与える。任意の $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ を $\mathbf{v} = \alpha \mathbf{a}_1 + \beta \mathbf{a}_2$ とすると, $A\mathbf{v} = \alpha \mathbf{a}_1 - \beta \mathbf{a}_2$ になる。これを絵に描いてみよ。

質問 20: 板書事項への質問なのですが, $F_x = \frac{2x}{p^2}$, $F_y = \frac{2y}{q^2}$, $dF \neq (0, 0)$ E のの部分に書かれたものは何でしょうか? 申し訳ありませんが読めませんでした。お答え: on です。

質問 21: 同じ種類としてひとまとめにするために合同という概念が生まれたというのは自然な発想だと感じた。授業では合同という概念をとり入れることで、集合の次元を減らすという例があったが、他の応用例が知りたい。授業で触れた合同という概念や $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ などの同型の概念を用いることで次元を減らすことを数学では考える機会が多くあるが、次元を減らすことは複雑な情報を単純にするメリットがあると考えられるが、他にもメリットはあるのか知りたい。お答え: 前半: 合同ってそのために生まれたのですか? 他の応用例としては線型写像の「次元定理」。後半: $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ では(実)次元は下がっていないと思います。ところで「メリット」って何ですか? どういう性質があったら「メリットがある」と言えますか?

質問 22: 講義で話していた平面上の三角形は 6 次元で表せるというのは、各辺を 2 次元ずつで表し、3 辺を 6 次元で表すということでしょうか。お答え: いいえ、平面上の線分を 2 つの数値で特定することができますか?

質問 23: 位相幾何学と微分幾何学の関係を知りたいです。今の私の認識では、位相幾何学の一部が微分幾何であるように感じられるのですが、これは正しいですか? 位相幾何 \subset 微分幾何のようなイメージです。

お答え: 間違っています。講義で少し説明したのですが。

質問 24: 逆三角関数はどういう問題で使われますか。お答え: たとえば $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x$ 。知ってるよね!

質問 25: $SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$ と表せるが、すべての $n \in \mathbb{N}$ について $SO(n)$ を一般化することは可能ですか? お答え: 「 $SO(n)$ の一般化」とは何をすることでしょうか。概念や対象の一般化とは、もとの概念や対象を含む、より大きな概念、対象を作ることだと(数学用語では)思うのですが。

質問 26: 行列は高校範囲ではない。直交行列は(おそらく)初年度にはやらない。お答え: 前半:はい 後半:いいえ

質問 27: 座標に原点および x 軸, y 軸を表す記載がない場合が見受けられます。又、ミスプリが多かったです。

お答え: 「座標」は「座標平面」のことでしょうか。このような包括的なご指摘ではなく、具体的に「どこにどういうミスプリがあるか」、多くてもよいので列挙していただけないか?

質問 28: 滑らかな曲線は分割して回転させれば全て微分可能な関数になりますか? お答え: 「微分可能な関数のグラフ」のこと? 前回の講義では「滑らかな曲線」の(一時的な)定義として何を採用しましたか?

質問 29: C^∞ 級をなめらかとして C^1 級などの曲線でとりあげられなくなるものもありますか?

お答え: 「とりあげられなくなるもの」の意味がわかりません。能動態にしたときに「とりあげる」の主語は何でしょう。

質問 30: 合同変換の n 次直交行列と固有値の関係がよくわからなかった。/ 板書の表元とはどのような意味でしょうか? $F(x, f(x)) = 0$ はわかるがここから $F_x + f'(x)F_y = 0$ となるのはなぜか。

お答え: どのへんが? / たぶん「表示」/ Chain rule.

質問 31: $P(a, 0)$, $Q(-a, 0)$ からの距離の積が一定の点のあつまりである図形は、グラフ描画ソフトでみてみたら楕円みたいな形だったり双曲線にみたいな形だったりですが、どのようなところが発展するのかわからなくてモチベーションがないので、なにかこれについてのおもしろいトピックはありますか?

お答え: どのような... 以下の意味がとれません。「モチベーションがない」の主語は何でしょう。ちなみにこの図形は有界になるので「双曲線みたいな形」にはならないと思いますが。

質問 32: ・陰関数定理の証明がわかりません。・(2) のところで「固有値」と「回転・折り返し」の関係性がわかりませんでした。・群がわかりません。お答え: はい(としか言いようがない)。どう回答すべきなのだろうか。

質問 33: 特にないです。勉強がんばります。お答え: どうぞ

質問 34: 今回については特にありません。お答え: 残念

2 平面曲線の表示

復習 (陰関数定理)

定理 2.1 (逆関数定理, 教科書 199 ページ, 定理 A-1.5 の前半). 点 a を含む数直線の区間上で定義された C^∞ 級関数 $f(x)$ が $\dot{f}(a) \neq 0$ をみたすならば, $f(a)$ を含む区間で定義された C^∞ -級関数 $g(y)$ で $g(f(x)) = x$, $f(g(y)) = y$ をみたすものがただ 1 つ存在する. さらに, g の導関数 \dot{g} は $\dot{g}(y) = \frac{1}{\dot{f}(g(y))}$ をみたす.

定理 2.2 (陰関数定理, 教科書 200 ページ, 定理 A-1.6 の特別な場合). 領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ から \mathbb{R} への可微分写像 $F: U \ni (x, y) \mapsto F(x, y) \in \mathbb{R}$ と $(x_0, y_0) \in U$ が $F(x_0, y_0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ を満たしているとき, (x_0, y_0) の近傍 V と x_0 を含む \mathbb{R} の区間 I と, その区間 I 上で定義された可微分関数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して, $V \cap \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\} = \{(x, f(x)) \mid x \in I\}$ が成り立つ. とくに $F(x, f(x)) = 0$ が成り立つ. さらに $f(x)$ の導関数 $\dot{f}(x)$ は次をみたす: $\dot{f}(x) = -\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) / \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))$.

陰関数表示

- 「曲線 $F(x, y) = 0$ 」という文の意味.
- 曲線 $F(x, y) = 0$ が, 点 (x_0, y_0) のまわりでなめらかな曲線になるための十分条件 (テキスト 4 ページ)
- 陰関数表示の特異点 (テキスト 4 ページ)
- 関数のグラフは陰関数表示とみなせること (テキスト 3 ページ)

パラメータ表示

- パラメータ表示 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ (テキスト 4 ページ)*¹
- パラメータ表示の正則性と特異点 (テキスト 6 ページ)
- 自己交叉: パラメータ表示では特異点でない場合がある (テキスト 6 ページ)
- パラメータ変換 (テキスト 5 ページ)
- 関数のグラフはパラメータ表示とみなせること (テキスト 4 ページ)
- 極座標表示された曲線 (テキスト 8 ページ)

弧長

- 曲線の長さの定義 (テキスト 7 ページ)*²
- 弧長の不変性 (テキスト 9 ページの問題 2)

問 2.3. 区間 $I = [a, b]$ 上で定義された C^∞ -級関数 f のグラフを C とする: $C = \{(x, f(x)) \mid x \in I\}$. I の任

2019 年 10 月 3 日 ectdate

*¹ パラメータ表示: parametrization; 正則点: a regular point; 特異点: a singular point; 極座標系: the polar coordinate system; 直交座標系 (デカルト座標系): the Cartesian coordinate system.

*² 曲線: a curve; 弧長: the arclength.

意の分割 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ に対して

$$\mathcal{L}_\Delta := \sum_{j=1}^N d(P_{j-1}, P_j) \quad \left(P_i = (x_i, f(x_i)), i = 0, 1, 2, \dots, N \right)$$

とおく. ただし, d は \mathbb{R}^2 のユークリッド距離を表す. このとき, 次を示しなさい:

$$(*) \quad \sup\{\mathcal{L}_\Delta \mid \Delta \text{ は } I \text{ の分割}\} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

例 2.4. ● 楕円 (テキスト例 1.1, 例 1.3 の最初の例)

- レムニスケート (テキスト例 1.1, 例 1.3 の 3 番目の例の $a = 1$ の場合)*³

$$(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0, \quad \gamma(t) = \left(\frac{\cos t}{1 + \sin^2 t}, \frac{\cos t \sin t}{1 + \sin^2 t} \right) \quad (-\pi < t \leq \pi), \quad r^2 = \cos 2\theta.$$

第 1 回の問題 1-2 の $a = c = 1/\sqrt{2}$ の場合.

- 標準的な 3/2-カスプ (テキスト付録 B-8):*⁴ $x^3 - y^2 = 0$; $\gamma(t) = (t^2, t^3)$.

弧長パラメータ表示

- 速さが 1 になるパラメータを弧長パラメータという (12 ページ)*⁵

曲率

- 曲率の定義 (13 ページ (2.5) 式), 計算法 (13 ページ (2.6), (2.7) 式)
- 曲率のパラメータ変換による不変性.

例 2.5. 懸垂線 $y = \cosh x$ は,

- $\gamma(x) = (x, \cosh x)$ とパラメータ表示できている.
- $\gamma(s) = (\log(s + \sqrt{1 + s^2}), \sqrt{1 + s^2})$ は弧長パラメータによる表示.
- 曲率は $1/(1 + s^2) = \operatorname{sech}^2 x$.

問題

2-1 次のような xy 平面上の曲線 C を考える: C は点 $(1, 0)$ を通り, C 上の点 P において曲線に引いた接線と y 軸の正の部分 $Q = (0, t)$ ($t \leq 0$) と交わり, PQ の長さが一定 1 である.

- (1) C をグラフ $y = f(x)$ の形で表しなさい.
- (2) C を Q の y 座標 t によってパラメータ表示しなさい.
- (3) 曲線 C の弧長パラメータ表示を与えなさい.

2-2 方程式 $x^4 + y^4 = 1$ は xy 平面上の滑らかな曲線 C を表すことを示し, C 上の点 (a, b) における C の曲率の絶対値を a, b を用いて表しなさい.

*³ レムニスケート: the lemniscate; カッシニの楕線: the Cassinian oval;

*⁴ カスプ: a cusp.

*⁵ 弧長: arclength; 曲率: the curvature; 曲率円: the osculating circle