2019 年 10 月 17 日 (2019 年 10 月 24/31 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一（MTH.B211）講義資料 3

前回までの訂正

- 黒板に書いた円のパラメータ表示の 3 つ目：$\gamma(u) = (\tanh t, -\operatorname{sech} t) \Rightarrow \gamma(u) = (\tanh u, -\operatorname{sech} u)$
- 講義資料 2，1 ページ，下から 14 行目：試して見ます ⇒ 試してみます
- 講義資料 2，6 ページ，問題 2-1 の 2 行目：$\mathrm{Q}(0,t)$ $(t>0)$ ⇒ $\mathrm{Q}(0,t)$ $(t \geqq 0)$

授業に関する御意見

- もう少し声を大きめに話して頂けるとありがたいです． **山田のコメント：** ごめんなさい．PA を使うと言っていたのに忘れていました．今回はやってみます（忘れていたら言ってください）．
- 前回の問題の解説と今回の授業の始まりの間が曖昧でどこまで解説なのかを明示してほしいなと思いました． **山田のコメント：** そういうスタイルです．問題は，講義内容から手が付けられるものとしていますので，皆さんは，考えてくるでしょう．それを材料に次の回の内容を導入をすることにより「考えてきた問題から講義にはいる」という自然な流れにしようと思っています．
- 定理を導入して計算をするときには一度極めて簡単な例で試すなどしてなれるための時間を少し確保するといいかと思います．（証明は各自で必要に応じて調べれば十分だと思います） **山田のコメント：** 同意．講義資料の「問」がそれ．
- 板書を取っているので，説明を聞きながら板書をとると授業のスピードが早いため説明をききもらしてします（原文ママ）（授業のスピードとは，内容の進度のことでなく，ある程度書いてから次にいくタイミングなどのテンポのこと）.
  山田のコメント： 了解．工夫しますが，その場で言っていただくと助かります．ところで「板書をとる」というフレーズを使う方をしばしば見ますが，ちょっと違和感があります．「板書」とは「黒板に書くこと」の意味だと思うのですが.
- 先週，「題意」を用いてしまった者です．「大学への数学」でも用いられていましたが，そちらは「解説」の中で用いられていました．しかし「証明」を書く際にはできる限り誰が見ても曖昧さの無い文章であるべきであり，これからは伝え方を注意するようにします． **山田のコメント：** 単語一つひとつの意味を大事にしましょう．ところで「大学への数学」ではどのような意味で「題意」を使っていたでしょう．山田が気にしているのは「題意が満たされた」「題意より」という二つの使い方が混在することです．前者は結論，後者は仮定という意味で，この二つに同じ語を充てるのは反則ですよね.
- 「題意」のように，数学用語としてあまり認められていないものにも関わらず高校などで使われる言葉は，他にも「与式」や「複号同順，複号任意」があると思いました．とくに「複号同順」は明らかにわかる場合（「$\mp$」があるときなど）にも書くことを強要されていたので困ってました． **山田のコメント：** 「題意」「与式」は高校数学の「方言」のような気がしますね．高等学校の教科書では使われていないと思いますが（例があったらご教示ください)．「複号同順」はそこまで方言だとは思っていません．書く必要がある場面もありますから．まあ，曖昧にしたくなければ “$x = \varepsilon y$, $z = -\varepsilon z$ $(\varepsilon = 1 \text{ or } -1)$” と書けばよいんですが.
- 今幾何学で行っている内容は今まで忌避してきたものだったので，これを機会に馴染めるようになりたいです.
  山田のコメント： なんで忌避してたの？
- このプリントの余白が狭いと感じますが，広いと先生がプリントを見るのが大変なので悪いのは自分なんだと思います．ごめんなさい． **山田のコメント：** 「問題の解答」「質問等」「感想等」のうちどのパートがどれくらい欲しいかお知らせください.
- 表面の問題を数時間格闘した結果，何もてがだせないまま終わってしまって，悲しくなりました．微積分を勉強し返すのにオススメの本があれば教えてください． **山田のコメント：** 講義資料内の問題など解いてみると，復習になるはず．「オススメの本」については，どのあたりで停滞しているかによると思います.
- プリントに所々教科書の参照ページ，式番号が記されているのか分かりやすくて助かります． **山田のコメント：** よかった.
- 計算が大変でした．あと，コーヒーこぼしました．よみづらくてすみません.
  山田のコメント： 前半：そう？後半：気にしません．ぼろぼろになってスキャナに通らないと問題ですが.
- 図形の性質はパラメータのとり方によるべきではないという考え方に納得しました． **山田のコメント：** でしょ.
- 特異点といっても「陰関数表示における特異点」と「パラメーター表示における特異点」は全く同じではないということころが面白かった． **山田のコメント：** 気をつけないとね.
- 「速度注意」のお話が面白かったです．私も日常でそのような用語に疑問を覚えられるようになりたいです.
  山田のコメント： すみません．使い古したネタです.
- 特になし． **山田のコメント：** そう？

質問と回答

質問 1： 媒介変数として弧長パラメータを取ってくる理由が分からなかったので，教科書を読み進めていたら，弧長パラメータを用いた表示では加速度ベクトルが単位法線ベクトル（原文ママ：単位ではない）であるという性質から分かりやすく曲率が定義できているな，と感じました．そこで，あるパラメータ t で表示した時，加速度ベクトルと速度ベクトルの内積がどうなるか気になったのですが，$\gamma(t) = (x(t), y(t))$ と表示すると $\dot{\gamma}(t)\cdot\ddot{\gamma}(t) = (\text{中略}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\dot{\gamma}|^2$ という結果になりました．これは，速さが変化するようなパラメータだと，加速度ベクトルが速度ベクトルに垂直にならず，接線方向にも加速度を持ってしまうから，そうならないように，速さが変化しないパラメーターとして弧長パラメーターを持ってきたのでしょうか． **お答え：**そうです．

質問 2： 陰関数表示で特異点をもたないのにも関わらず正則なパラメータ表示をもたないような曲線は存在するのでしょうか． **お答え：**Cassinian oval の特別な場合のように，陰関数表示された図形が連結にならないこともありますが，一つひとつの連結成分に限ればかならず正則なパラメータ表示ができます．これは 1 次元多様体が円または直線と微分同相であることによります．

質問 3： 図形の性質はパラメータ表示によるべきではないが，パラメータ表示の仕方によってわかりやすさが変わってくるので「わかりやすい」パラメータを考えることは重要だと思います．弧長パラメータ表示は速さを一定にすることによって余計な情報を削いでいて，わかりやすいパラメータ表示の一つだと思うのですが，他にこのようなわかりやすいパラメータ表示はありますか． **お答え：**考える問題や対象とする曲線による．グラフ表示がよい場合もある（例えば講義資料 5 ページの問 2.3）．講義資料 6 ページ，問題 2-1 も参照．

質問 4： 問題を解いたあとにアプリをつかってグラフを書いてみたら，問題の仮定を満たしていないように感じました（上のような図（山田注：略））．見直しをしても計算はキレイになるし，どこが間違えているか見つかりそうにありませんでした．もし回答が間違えていたら，そのヒントを，そうでなければアプリにどんな誤認を与えると上のようなグラフになるか意見を頂けたらと思います．

お答え： 平方根をとるときに符号を間違えています．仮定 $t \geqq 0$ を考慮する必要があります．ところで「アプリに...」という質問は，どういうアプリを使っているかという情報がなければ回答不能と思います．

質問 5： 曲線 $F(x,y) = 0$ が点 (x_0, y_0) のまわりでなめらかな曲線になるための十分条件（テキスト 4 ページ）とありますが，十分条件はありますか？
$x^2 + y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 1)^2 = 0$ と同値であるにもかかわらず $F(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$ としたときに $\forall(x_0, y_0) \in \{(x,y)|F(x,y) = 0\}$ $(F_x(x_0,y_0), F_y(x_0,y_0)) = (0,0)$ となってしまい，なめらかな曲線であることが (F_x, F_y) の値からいえないのはどうしてですか？この $(F_x, F_y) \neq (0,0)$ がなめらかな曲線となるための十分条件にすぎないからですか？

お答え： 後半：そうです．前半：自明な（ほとんど tautological な）必要十分条件は書けますが，点 (x_0, y_0) における F の微分の値から判定することはできません．

質問 6： $\gamma(s) = (\cos s, \sin s)$ $(I = (-\pi, \pi))$ と $\gamma(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ $(-\infty < t < \infty)$ は同じ図形を表すが，$\gamma(s)$ と $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ は $(x,y) = (-1,0)$ に対応する s が存在しないから違う図形を表すということになりますか． **お答え：**そうです．もちろん $\{(x,y)\,;\,F(x,y) = 0\} \setminus \{(-1,0)\}$ と $\gamma((-\pi,\pi))$ は同じ集合ですね．

質問 7： レムニスケートの「自己交差」は授業でのパラメータ表示を用いれば異なる t の値で同じ座標になる点と言えると考えました．しかし陰関数表示ではそのように言えないと思ったのですが「自己交差」はどのように定義されているのでしょうか． **お答え：**ここでは「パラメータ表示された曲線の自己交叉」という意味でこの語を用います．陰関数表示の場合には少し手間がかかります．たとえば，曲線 C 上の点 P の近傍 U から $\mathbb{R}^2$ の原点の近傍 V への微分同相写像 φ が存在して，$\varphi(C \cap U) = V \cap \{(x,y)\,;\,xy = 0\}$ となる，とか．これだと 2 つの滑らかな曲線が接することなく交わっている場合しか表現できていませんが．

質問 8： $C : \gamma(t) = (x(t), y(t))$ が正則曲線かつ $x(t)$, $y(t)$ が C^∞-級関数ならば（逆関数定理によって）C は滑らかな曲線になると思います．このことの逆は成立するでしょうか．自分なりに考えてみました（イメージです）．（山田注：以下略） **お答え：**逆とは「滑らかな曲線ならば $C : \gamma(t) = (x(t), y(t))$ が正則曲線かつ $x(t)$, $y(t)$ が C^∞-級関数と表される」ということでしょうか．とすると反例あり（講義で説明したはず）．

質問 9： 自己交叉において，陰関数表示の特異点とパラメータ表示の特異点がことなることがありますが，自己交叉における接線はどうなりますか．たとえばレムニスケートを考えるとき，第 1 象限を進むとき $(t\colon 0 \to \frac{\pi}{2})$ 接線の傾

きは負から正にかわりますが，第 2 象限を進むとき（$t\colon \pi \to \frac{3}{2}\pi$ のとき接線の傾きは正から負に変わりますが，極限の考え方のように接線の傾きは 0 ですか.

お答え： 曲線上の点における接線は意味を持ちません．パラメータ表示 $\gamma(t)$ の $t=\frac{\pi}{2}$ における接線は $\dot\gamma(\pi/2)=-\frac{1}{2}(1,1)$ 方向，$t=\frac{3}{2}\pi$ における接線は $\dot\gamma(3\pi/2)=\frac{1}{2}(1,-1)$ 方向.

質問 10： p. 13 を読んで曲率がどのように導入されるかについては分かりました．速さが一定になるように動かせば速度ベクトルと加速度ベクトルが直交するためこのように導入すればよいというのは納得できますが，歴史的にはどのような動機で曲率を導入したのでしょうか.

お答え： 多分，曲率円（曲線と 2 次以上の接触をする円）の半径の逆数だと思いますが，不確かです.

質問 11： 弧長について，使うパラメータによって積分が計算できない場合はあるのでしょうか.

お答え： 置換積分法の公式を考えましょう.

質問 12： パラメータ表示は 1 つとは限らず複数個考えられるとおっしゃっていましたが，何個あらわせる，また表し方が無数にあるということはいえるのでしょうか. **お答え：**区間 $[a,b]$ 上での狭義単調増加関数（C^∞-級関数で，その微分係数常に正）は無限個あるので，パラメータ表示も無限個.

質問 13： 曲率が定義できない（速度ベクトルが $\mathbf{0}$ になる）点は任意のパラメータ表示で特異点になる（と思われる）のですが，逆は成り立ちますか？（つまり曲率が存在するならばあるパラメータ表示が存在して微分が消えない）.

お答え： 曲率の定義は何でしょう．速度ベクトルが消えていないことを前提として定義していると思いますが.

質問 14： 楕円や双曲線，放物線にはその定義から焦点が存在すると高校で習いました．授業でレムニスケートにも「異なる点からの積が一定」という話があったので，レムニスケートにも焦点があるのだと思います．他にも焦点というものが存在する曲線があればいくつか教えていただきたいです. **お答え：**「楕円の焦点」の定義はありますが，ただの「焦点」はどう定義すればよいでしょう．レムニスケートの 2 定点はその定義にあてはまるでしょうか．あるいはそれをレムニスケートの焦点と定義しますか？そうすると「焦点をもつ曲線」の意味は？

質問 15： 通常のパラメータ表示よりも，弧長パラメータ表示を用いた方がよい場面は多くあるのですか？

お答え： フルネ方程式，平面曲線の基本定理，平面曲線の自然方程式．幾何学概論第二で現れる「測地線」は弧長パラメータ（に比例するパラメータ）が本質的.

質問 16： いままでよく理解できず「次元」という言葉を使っていたのですが，特定するのに必要最低限の情報の数という認識を前回の合同な三角形の話の中で持ったのですが，正しいでしょうか？また、物理で長さ，質量，時間の単位のことを言う「次元」は数学の「次元」と同じものですか？

お答え： 前半：ただしい．ただし現代数学では「次元」の意味がもっと一般化・洗練されている．後半：違うもの.

質問 17： 質問と回答，質問 1 に対するお答えの最後の 2 文について，直感的には円は線対称かつ点対称な図形であるため向きや折り返しについて考える必要がないため平行移動のみ考え，2 次元減らすことで自由度 1 次元だと思いますが，たとえば正三角形の場合，1 つの頂点の位置，2 つめの頂点の向き，3 つめの頂点が線分のどちら側にあるのかで合計 4 次元，最終的に自由度が 1 次元（辺の長さ）と考えると 3 次元減っています．正三角形も線対称な図形であるのに減る自由度が 3 つのままなのはなぜでしょうか.

お答え： 前回の質問 1 の回答の (1) 参照．折り返し（線対称）や 180° 回転は離散的（連続的に折り返しはできないし，いきなり 180° まわすことはできない）ので，自由度は落ちません．円の場合は，自分自身を動かさない回転が 1 パラメータ分ある点が三角形の場合と違います.

質問 18： 「特異点での曲線の形にはさまざまな場合がある」とのことですが，特異点を持つ曲線あるいは曲面について，図による可視化が不可能なものは存在するのでしょうか.

お答え： 「図による可視化」が何を指しているか分かりませんので回答不能．たとえば「直線」は特異点を持ちませんが，非有界だから図による可視化ができないといえばできないわけです.

質問 19： 陰関数定理より「C^∞ 級関数 $F\colon U\to\mathbb{R}$ (U は $\mathbb{R}^2$ の領域）が $F(x,y)=0$ で描くグラフが陰関数表示の特異点をもたないならば，ある正則なパラメータ表示が（少なくとも 1 つ）存在する」と考えてよいですか.

お答え： 「$F(x,y)=0$ で描くグラフが陰関数表示の特異点をもたない」という言い方はおかしいのでは？「陰関数表示 $F(x,y)=0$ が特異点をもたない」．あなたは「グラフ」という語で何を表していますか？また，このような質問では「...」の部分が「数学的主張」になっていますから，「と考えてよいですか」という曖昧な（自己防衛？）聞き方ではなく，「が成り立ちますか」と聞くべきだと思います．回答は「成り立つ」.

質問 20： 特異点ならば自己交叉があるわけではないが，自己交叉がある点は特異点である，という認識でよいですか.

お答え： 「特異点」という語はそれだけでは意味を持たず，「パラメータ表示の特異点」「陰関数表示の特異点」という使い方を（ここでは）する，と説明したはず．どちらのことを言っているのかわからないので，回答のしようがない.

ところでなんで「認識」なんていう難しい，かっこよさげな言葉をつかうんですか？「という認識でよいですか」は「ということでよいですか」と置き換えられませんか？

質問 21： 弧長の不変性を示すときなど，一方のパラメータが他方のパラメータの（微分可能な）関数として表されることを仮定して計算していましたが，そう考えていい理由がよく分かりません．

お答え： 今回もう少し説明しますが，パラメータ変換の定義と思ってください．

質問 22： 弧長パラメータを使うといいことはありますか？使うために結局 $|\dot{\gamma}(t)|$ を計算しないといけないし，同じ場所を通ったらあまり意味がなくなってしまう（下線山田）．

お答え： 下線の部分の意味がわかりません．「通じさせる」文を書きましょう．

質問 23： 陰関数定理を使わずに曲率を求められますか（陽関数から）？

お答え：「陽関数」はグラフ表示の意味でしょうか．これはパラメータ表示の特別な場合とみなせるので，むしろ曲率の定義から直接計算できると思いますが．

質問 24： 双曲線関数（原文ママ：双曲線関数はたくさんあるが，双曲的余弦ですね）で表される懸垂線が，実際にロープを垂らしたときにできる曲線と一致することは，どのように導出できますか．

お答え： 曲線の微小部分の両端の張力と重力が釣り合っている，という式を書くと微分方程式ができる．

質問 25： 弧長を計算する際にルートの積分がでてくるので積分ができないことが多いという話において「積分できない」とは原始関数が初等的な関数（原文ママ）で書けないという意味であってますか？それとも原始関数が存在しない場合が有りうるのでしょうか．

お答え： 前半：「初等的な関数」を「初等関数」と置き換えれば合っている．講義で説明した（「初等関数」は厳密な定義を持つ語）．後半：**連続関数の原始関数は必ず存在する**．連続関数の積分可能性と微積分の基本定理．

質問 26： 授業中に $F(x,y)=(x^2+y^2-1)^2=0$ という例で，全体が特異点になることが紹介されましたが，グラフで描いた（原文ママ）ときには $x^2+y^2=1$ と一致します．陰関数の特異点でもグラフを描いたときに一件滑らかに見えるが特異点になる例は存在しますか．

お答え： ご質問の例がそれですが．ちなみに，「グラフで描く」というフレーズがよくわかりません．$\{(x,y)|F(x,y)=0\}$ という集合を図示することを「グラフで描く」っていうんですか？この講義では $\{(x,y)\,|\,y=f(x)\}$ を「f のグラフ」と呼んでいます．

質問 27： 講議資料（原文ママ；講義資料の誤り．最初の講義で言いませんでしたっけ）に曲線 $F(x,y)=0$ が (x_0,y_0) のまわりでなめらかな曲線になるための十分条件（テキスト 4 ページ）とありますが，これは $F_{y_0}(x_0,y_0)\neq 0$ のとき，陰関数定理によって点 (x_0,y_0) の近くで $y=f(x)$ で表せて，$y=f(x)$ がなめらかだから $F(x,y)=0$ も点 (x_0,y_0) でなめらかということで合ってますか．

お答え：「$y=f(x)$ がなめらか」の意味は「関数 f がなめらか（C^∞-級）という意味なら合っています．ていうか講義でそう説明した．**たのむから「講議」という誤字は使わないで！**

質問 28： 2-1（山田注：問題 2-1 のことか）で，点 P における微分，接線の長さだけで曲線が具体的に決まると思えないが，なにか条件を見落としているのだろうか． **お答え：**条件を式で書き下すのはそれほど難しいと思いませんが，その上でなぜ「決まると思えない」と考えたか，説明できますか？

質問 29： 2-2 (山田注：問題 2-2 のことか) で何かよさそうなパラメータを無つけたいとき，極座標でおいてみたりその他思いつく限り試しても見つからないとき，どのような手法をとればいいだろうか（イメージも大事？）

お答え： イメージ不要．グラフ表示して定義にしたがって計算すればよい．

質問 30： 曲率の定義式のイメージがあまり上手く想像できないのですが，どのような量を表しているのでしょうか．

お答え： 多義的．イメージはそれらを扱っているうちに生まれるものであって，定義式を見てすぐにわかるものではない．少なくとも今回少し扱います．

質問 31： 問題 2-1 が一定 1 と書いてあり，「一定値」なのか「一定値 1」をとるのかが非常に分かりにくかったです．

お答え： 書いてあるとおりに読めば後者．講義時間に「一定値 1」と説明した．

質問 32： 積分ができません．なにかコツはありますか． **お答え：**人それぞれ．今回の問題に現れる積分は定石．

質問 33： 曲率は現実社会でどういう事で使われますか． **お答え：**あなたにとっての「現実」が何かわかりませんのでお答えできませんが，たとえば clothoid で検索してみましょう．

質問 34： 曲率で行列式が出てくる意味がよく分かりません． **お答え：**そうですか，としか言いようがない．質問の形にしてごらんなさい．

質問 35： 特になし **お答え：**本当に？

3 弧長パラメータと曲率 (テキスト §2)

■弧長パラメータ表示

- 速さが 1 になるパラメータを弧長パラメータという（12 ページ）. [*1]

■曲率・曲率円

- 曲率の定義（13 ページ (2.5) 式），計算法（13 ページ (2.6) 式；弧長パラメータ，13 ページ (2.7) 式；一般のパラメータ）[これが前回の「一時的な定義」].
- 曲率のパラメータ変換による不変性：定義から直接わかる.
- 曲率の回転・平行移動による不変性：(21 ページ 系 2.7).
- 曲率円（15 ページ），これが「曲線をもっともよく近似する円」であること（17 ページ，定理 2.4）

問 3.1.
- 直線の曲率は恒等的に 0 である.
- 半径 a (>0) の反時計回り（時計回り）の円の曲率は $1/a$ （$-1/a$）である.

■曲率が平面曲線を定めること

■フルネの公式

- 単位接ベクトル $\boldsymbol{e}(s)$，左向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}(s)$[*2]
- フルネ枠 $\mathcal{F} := (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n})$
- フルネの公式（テキスト 21 ページ）

■平面曲線の基本定理

- 平面曲線の基本定理（テキスト 22 ページ，定理 2.8）[*3]

2019 年 10 月 17 日 (2019 年 10 月 24/31 日訂正)

[*1] 弧長：arclength；曲率：the curvature；曲率円：the oscilating circle

[*2] 単位接ベクトル：the unit tangent vector; 単位法線ベクトル：the unit normal vector; フルネ枠：the Frenet frame.

[*3] 平面曲線の基本定理：the fundamental theorem for plane curves

問題

3-1 定数 α, β（$\alpha \neq 0$） に対して $\kappa_{\alpha,\beta}(s) := \alpha\cos s + \beta$,

$$\boldsymbol{e}_{\alpha,\beta}(s) := \bigl(\cos\theta_{\alpha,\beta}(s), \sin\theta_{\alpha,\beta}(s)\bigr), \qquad \theta_{\alpha,\beta}(s) := \int_0^s \kappa_{\alpha,\beta}(u)\,du$$

と定める．また $\gamma_{\alpha,\beta}(s)$ を弧長 s によってパラメータづけられた曲線で曲率 $\kappa_{\alpha,\beta}(s)$ をもつものとする．このとき，

(1) $\boldsymbol{e}_{\alpha,\beta}(s)$ が周期 2π をもつためには α, β がどのような条件を満たさなければならないか.

(2) 任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して，次を満たすような行列 $A_{\alpha,\beta} \in \mathrm{SO}(2)$，ベクトル $\boldsymbol{a}_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}^2$ を α, β を用いて表しなさい：

$$\gamma_{\alpha,\beta}(s + 2\pi) = A_{\alpha,\beta}\gamma_{\alpha,\beta}(s) + \boldsymbol{a}_{\alpha,\beta}.$$

ただし $\gamma_{\alpha,\beta}$ は列ベクトルに値をとる関数である.

(3) $\gamma_{\alpha,\beta}$ が周期 2π を持つような定数 α, β が存在することを示しなさい.

3-2 実数全体で定義された関数

$$\kappa_1(s) := \frac{1}{1+s^2}, \qquad \kappa_2(s) := \frac{2}{1+s^2}$$

に対して，$\gamma_j(s)$ $(j = 1, 2)$ を，s を弧長パラメータ，$\kappa_j(s)$ を曲率にもち

$$\gamma_j(0) = (0, 0), \qquad \gamma_j'(0) = (1, 0)$$

を満たすものとするとき，

(1) $\gamma_j(s)$ $(j = 1, 2)$ を具体的に求めなさい.

(2) $\gamma_j(s)$ $(j = 1, 2)$ は自己交叉を持つか.

3-3 曲線

$$\gamma_1(t) := (t, t^2), \qquad \gamma_2(t) := (\sin t, \sin 2t)$$

を弧長パラメータ s で表示しなおしたものをそれぞれ $\tilde\gamma_1(s)$, $\tilde\gamma_2(s)$ と書く．ただし $\tilde\gamma_j(0) = \gamma_j(0)$ $(j = 1, 2)$ とする．$\tilde\gamma_j(s)$ の曲率を $\kappa_j(s)$ $(j = 1, 2)$ とするとき，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \kappa_1(s)\,ds, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \kappa_2(s)\,ds$$

を求めなさい.