2019 年 10 月 24 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一（MTH.B211）講義資料 4

お知らせ

- ~~次回 **10 月 31 日**に**定期試験の予告**を行います．皆様お誘い合わせの上ご出席ください．~~ 変更：11 月 7 日

前回の補足

- この講義での自己交叉の定義について：パラメータ表示された曲線 $\gamma(t)$ $(t \in I)$ が点 $\mathrm{P} \in \mathbb{R}^2$ に自己交叉をもつ，とは $\gamma(t) = \gamma(t') = \mathrm{P}$, $t \neq t'$ となる $t, t' \in I$ が存在することである．

前回までの訂正

- 問題 2-1 の解説で，$\gamma(t) = (\operatorname{sech} t, t - \tanh t)$ に対して $\dot\gamma(t) = \tanh t(\operatorname{sech} t, \tanh t)$ と書きましたが，正しくは $\dot\gamma(t) = \tanh t(-\operatorname{sech} t, \tanh t)$.
- 講義資料 3, 1 ページ，下から 19 行目：されちえた ⇒ されていた
- 講義資料 3, 3 ページ，質問 18 ⇒ お答え．以下，質問の番号が一つずつずれる．
- 講義資料 3, 6 ページ，問題 3-1：定数 α, β に対して ⇒ 定数 α, β（$\alpha \neq 0$） に対して

授業に関する御意見

- 「認識」という言葉を「使うのがあまり好ましくない難解な単語」だとお考えのようですが,「〜という認識でよいですか」という表現について個人的には全く問題がないように感じました.（自分はこのような表現を使っていませんが，この場合の「認識」とは「物事の理解」という意味だと思われます）この表現は指摘されるほど不適切なものなのでしょうか.

  山田のコメント： 「$1+1=3$ という認識でよろしいでしょうか」と「$1+1=3$ が成り立つでしょうか」のどちらが数学的に誠実な質問と思いますか？前者の場合,「あなたがそう認識するのは自由です」という回答が可能だと思いますが，後者は「いいえ」という回答しかできません．どちらが質問として適切でしょう．
- 犬跡線をインターネットで検索したのですが，全然出てこなかった.

  山田のコメント： ほんとですね.「追跡線」の方が一般的なようですね．Wikipedia の「トラクトリクス」の項には「犬曲線」と書いてありました.
- 翌日に課題提出だと考える時間が足りないです．一週間後の金曜ではだめなのですか. . .

  山田のコメント： 講義資料 3「授業に関するご意見」の 2 番目のご意見とそれに対するコメント参照．一週間後の金曜日に提出ではこれができないんです.
- 弧長を求めるときに下端は 0 とおくので合っていますか.

  山田のコメント： あっていません．定義域が 0 を含まない場合はどうしますか？
- 双曲線関数の定義，微分の値等の罫線に慣れておきたいと強く思いました.

  山田のコメント： 使わなければそれで済みそうですが，結構便利なのでよければ覚えてください.
- 逆関数の微積の知識が乏しいので学習します.

  山田のコメント： 乏しい，って大した量ではないと思うのですが.
- 難しいですが頑張ります.　**山田のコメント：** はい.
- 前回も今回も時々車の話がでていたので，先生は車が好きなのかなと思いました.

  山田のコメント： 最近は月に 1 回も運転しません．空間曲線の項では「飛行機」の例えを出しますが，飛行機の運転はしたことがありません.
- 平面曲線の基本定理を車の運転で例えていただいたのがわかりやすかったです．IC への曲線がうずまきになっていて，曲率と関係しているのは少し感動しました.

山田のコメント： 楽しいよね.

- 今回の授業で曲率と曲線が合同変換を除いて 1 対 1 に対応しており，曲率という概念はその意味で重要な概念であると実感が持てるようになった気がします.
  山田のコメント： よかった．何かの「量」を定義するのは自由ですが，それが「意味がある」と思えるためにはどういう定理が必要なのか，ということをさまざまな数学の学習を通して感じて頂けるとよいと思います.
- 曲率から曲線を作ることができるということがとても面白かった.
  山田のコメント： よかった.
- 平面曲線の基本定理が基本定理っぽい主張なのがとてもたのしかった.
  山田のコメント： どのへんが？
- 初回の授業で O(2), SO(2) の説明がほとんど分かりませんでしたが，復習して理解できました.
  山田のコメント： 講義で「説明なし」で使っているのはそれが狙いでもあります.
- 問題おもしろかった.
  山田のコメント： 楽しんでいただけて幸いです.
- 今回の問題が解けなかったのでもう少し頑張ります.
  山田のコメント： 残念です.
- 今回の問題は少し大変でした.
  山田のコメント： ですよね.

質問と回答

質問 1： 平面曲線の基本定理は有界閉区間で定義された曲率関数でなくても成り立ちますか？（$\kappa(s)\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ など...）

お答え： はい.

質問 2： 自己交叉の定義はどのようになるのですか．パラメータがつけられた曲線 $\gamma(s)$ について，$\alpha \neq \beta$ かつ $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ でよいのでしょうか．α, β の近傍において曲線 $\gamma(s)$ がそれぞれ接していくような状態で交叉というのは少し違和感があるのですが... また接する状態を省くにはどの程度の条件が必要でしょうか.

お答え： 前半：それでよいです（この講義ではこれを定義として採用します）．後半：たとえば「$\gamma'(\alpha)$ と $\gamma'(\beta)$ が一次独立」.

質問 3： ある点で自己交叉していることの必要十分条件は (1) $\exists s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ s.t. $\gamma(s_1) = \gamma(s_2)$ かつ $\gamma'(s_1) \neq \gamma'(s_2)$ (2) $\exists s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ s.t. $\gamma(s_1) = \gamma(s_2)$ かつ $\nexists k$ s.t. $\gamma'(s_1) = k\gamma'(s_2)$．のどちらでしょうか．(1) だとすると，右図（略：二つの断片が逆向きに接している）のような図形も自己交叉に含まれると思いました.

お答え： 含まれることにしています．さらに (1) の $\gamma'(s_1) \neq \gamma'(s_2)$ の条件も外すことにします.

質問 4： 前回の問題 2-1 の (1) の解説において $t = f(x) - xf'(x)$ といきなり板書されていたのですが，あくまでもこれは「C がグラフ $y = f(x)$ の形で表すことができる」という前提のもとで成立する式だと思います．しかし問題文からは「」の内容にあたる部分がないように感じました．仮に「」の前提がなかったとしても解けますか.

お答え： 曲線上の点 (x, y) における接線が y 軸と交わることから，接線は y 軸に平行ではない．したがって，この点の近くで曲線は $y = f(x)$ とグラフ表示できる.

質問 5： 空間内での曲線の場合はどのようになっているのかと思い，教科書 56 ページの空間曲線の基本定理を見ました．「C^∞ 級の関数が $n-1$ 個与えられていれば，曲率，捩率とその一般形の $n-1$ 個のパラメータが与えられた関数と一致する弧長パラメータ表示された曲線が合同変換をのぞきただ一つ定まる」という定理は成り立つのでしょうか.

お答え： 「$\mathbb{R}^n$ の曲線」ですね．はい．たとえば，丹野修吉「多様体の微分幾何学」（実教出版）の最初の方に書いてある.

質問 6： 今回の問題（山田注：問題 3-2 のこと？）では，パラメータがそれぞれ奇関数や偶関数になった（山田注：座標関数のこと？パラメータは独立変数だから奇関数などにならないと思う）のである程度考えやすかったですが，一般の（なめらかな）曲線に対して，自己交叉をもつかどうかを調べる方法はありますか.

お答え： $\gamma(s) = \gamma(s')$ という，未知数 s, s' に関する方程式をとくわけですが，一般の場合はなかなか難しい．中間値の定理に持ち込むことはあると思います.

質問 7： クロソイド曲線は，高速道路において車が安全にハンドルを切ることのできる道路の形ということですが，例えば排水口にゴミが吸い込まれていくときに描く曲線，といった自然現象におきるうずまき曲線もこのクロソイド曲線なのでしょうか？

お答え： 多分（あまり自信はないが）対数螺線だと思う.

質問 8： 前回の問題 2-1 について「C の点 P において」という一文をある定点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ において」という意味だと思いよくわからなかったが，解説をきくと「任意の C 上の点 P において」という意味に聞こえたが正しいでしょうか．また，もし前者の意味で出題されるならば定点であるということは明示されている？

お答え： 前半：正しい．後半：「一定」という語で動点であることが読み取れると思います．

質問 9： 平面曲線の定理（山田注：平面曲線の基本定理のことか？）は，曲率が s の式でわかっているならば，曲線が唯一定めることができる，までが主張である（と思っている）ので，平面曲線の基本定理より $\gamma(s) = \left(\int(\cos\dots)\,du, \int(\sin\dots)\,du\right)$ と書くのは少し違和感があるのですが（具体的にこう書けるのは定理の内容には含まれないのかなと）．テストなどで上のように書いても大丈夫でしょうか．

お答え： 具体的な表示式は定理のステートメントに含まれないのかもしれませんね．この式が書いてない教科書もよくあるので．むしろ「証明」のステップかと思います．「テストで」っていうのはどうでもよいです．問題から読み取れる条件で，あなたが「理解していること」を採点者が読み取れるように書けばよいだけ．もし不正解といわれたら，「このように読んでほしい」とクレイムを付けてください．

質問 10： 教 P23（山田注：教科書の 23 ページのこと？）の (2.18) の，曲率関数 $\kappa(s)$ が与えられたとき求める平面曲線は具体的に $\gamma(s) = (\text{略})$ で与えられるというのが証明が分かりません．

お答え： $\gamma(s)$ の曲率が $\kappa(s)$ になるのはよいですね（講義時間に説明しました）．あとは一意性があれば結論が得られます．一意性は今回やります．

質問 11： 自然方程式というのは，どのあたりが自然なのですか？

お答え： 曲線の合同類の情報を過不足なく持っている．

質問 12： 平面曲線の基本定理で，$\gamma(s)$ について，$\gamma(s) = \left(\int_{s_0}^{s}\bigl(\cos\theta(u)\bigr)\,du, \dots\right)$，$\theta(s) = \int_{s_0}^{s}\kappa(u)\,du$ と書いていましたが，$\theta(u) = \int_{s_0}^{u}\kappa(v)\,dv$ になると思います．わざわざ $\theta(s)$ とそろえて書く意味があるのでしょうか．

お答え： 弧長 s の関数であることを明示したかった．「なると思います」ではなく「と書いてもよいと思います」ではないでしょうか．

質問 13： 曲率と曲率半径について，その点で半径を曲率半径とした円に近似しているということですか．

お答え： はい，2 次の近似になります．ただし中心は曲線の法線上になければなりません（なぜか）．

質問 14： 関数 f が周期 α を持っていたとき $f(x+\alpha) = f(x)$ ですが，この場合も自己交叉ということになるのでしょうか．また，十字に交わらず接している場合についても自己交叉であるのか教えてください．

お答え： （実数値）関数の話をしているのなら「自己交叉」とは関係なさそうですね．曲線のパラメータ表示 $\gamma(t)$ が $\gamma(t+\alpha) = \gamma(t)$ を満たす，と言い換えると問題の意味が意味をもちます．このとき γ の定義域を $\mathbb{R}$ とすると自己交叉と考えられますが，閉曲線を考えるときは $\mathbb{R}/\sim$ $(t \sim t' \Leftrightarrow t' - t \in \alpha\mathbb{Z})$ を定義域と考えることが多いようです．すると t と $t+\alpha$ は定義域上でも同じ点なので，自己交叉とはいえなくなります．

質問 15： 自己交叉の定義がよく分かりません（イメージはできるのですが）．

お答え： パラメータ表示された曲線 γ の，$\gamma(s) = \gamma(s')$，$s \neq s'$ をみたすパラメータの組 (s, s') または点 $\gamma(s)$．

質問 16： 自己交叉は，クロスしているようなものをよく考えますが，接しているものや一部かさなってしまうものは自己交叉とよびますか？

お答え： ここではそれらも自己交叉の仲間とすることにしましょう．

質問 17： 今回の課題で，自己交叉をもつか，という問があったが，自己交叉を持つかどうかを判断するのに必要なものは何ですか．（特異点になるということだけでは不十分ですよね）．

お答え： 今回の例では，自己交叉はパラメータ表示の特異点にはなりません．特異点という語，単独では意味がありません．

質問 18： 前回の質問で「焦点を何と定義するかによる」というお答えを見て，「そういえば 1 つの点から出た光線が曲線上で反射してもう 1 つの点に集まるからそれらを焦点と呼ぶと高校できいていたな」と思ったのですが，レムニスケートなどあらゆる二次曲線においてもそのような関係をもつ 2 点があったらそれらを焦点としていると思ってよいでしょうか．

お答え： (1) 「高校できいていた」部分，楕円，双曲線，放物線の焦点はそのような性質をもつことをご自分で確かめましたか．もし確かめていないのであればすぐに確かめてください．(2) レムニスケートは二次曲線ではありません．二次曲線の定義は？ (3) 一般の曲線に対して，ご質問のような 2 点が存在するということ前提に質問されているようですが，そのような点が存在することは自明でしょうか．たぶん「存在する」曲線の方が稀だと思います．たとえばレムニスケートやカッシニの橙線の定点 2 点はご質問のような性質を持っていますか（これも簡単に確か

められる）.

質問 19： 「グラフ」という単語について，古い（平成 14 年ごろ？）の数研出版の教科書（数学 II）には「方程式のグラフ」を「方程式の表す図形」と同じ意味で定義する記述があったのを覚えています.

お答え： なるほど，そうなんですか．この講義では「グラフ」という語を「関数のグラフ」という形でのみ使用します．二変数関数 $F(x,y)$ のグラフとは，関係式 $z=F(x,y)$ で表される xyz-空間の曲面のことです．方程式 $F(x,y)=0$ が表す図形のことは「関数 $F(x,y)$ の零点集合」ということにします.

質問 20： 曲線の曲がり具合を表すために，曲がり方が一定な（対称な）図形である円によって曲線上の点の曲率を考えることができることが分かりました．そこで次元を拡張して 3 次限（原文ママ：3 次元）空間における曲面の場合，曲面上の点の近くの様子をよく近似する球を用いて曲がり具合を記述できるのではないかと思いましたが，曲線のときと違って，曲面上のある点を通る経路は無数にありますし，曲面のパラメータ表示を考えてみても中々上手く式に起こせませんでした．曲面の曲がり具合はどのように考えれば良いのでしょうか.

お答え： 第四四半学期の「幾何学概論第二」で扱います．ヒント：球面はあらゆる方向に同じように曲がっているので，近似するには適切ではない．近似には二次曲面を用いる.

質問 21： P25 7 行目（山田注：教科書のことか？）の「周期関数が 1 周期において極大値をとる点の個数と極小値をとる点の個数はそれらが有限であれば等しい」という事の理由を教えてください.

お答え： 一つの極大値をとる点と，その次の極大値をとる点の間にはかならずただ一つ極小値をとる点がある.

質問 22： ρ を曲率半径，s を弧長，α, c を定数としたときに，$\log(\rho\cdot\frac{ds}{d\rho})=\alpha\log\rho+c$ をみたす曲線（「対数美的曲線」）は自然界によく現れるという話をきいたことがあるのですが，なぜ自然界によく現れるのかについては科学的に説明できますか．具体的には卵の輪郭や葉の輪郭などが対数美的曲線の一種に近似できるそうです.

お答え： すなわち曲率が弧長の冪乗に比例する曲線のことのようですね．曲率をテイラーの定理で近似すればどんな曲線でもこのような曲線で局所的には「近似」することはできるはずなので，それ以上の大域的な性質を考える必要があると思いますが，詳しくは知りません.

質問 23： 弧長径数の径はなぜ係ではないのですか．半径の径からですか.

お答え： 径と係では意味が違うから.「径」の訓読みはなんでしょう.

質問 24： 先生が講義中に用いた “sophisticate” の意味がわかりません.

お答え： (1) to alter deceptively, (2) to deprive of genineness, naturalness, or simplicity, (3) to make complicated or complex.

質問 25： 平面曲線の基本定理の説明のところで，積分定数によって，始点の位置や向きの任意性が生じるという話は納得しました．しかし，これでは条件をみたす曲線の一意性の保障はしていない気がします．一意性を示すためには，cos や sin をつかう表示以外にはないことを言う必要があると思いますが，別の議論が必要という解釈であってますか？

お答え： 証明はしていない，今回やる，と説明したはず.

質問 26： 平面曲線の基本定理の一意性のところで，最初に曲率が周期 L をもつという仮定を出していましたが，周期がないときはまた別の証明があるのでしょうか.

お答え： 「一意性が成り立つので，曲率が周期関数のときは特に...が成りたつ」ということを述べたので，一意性の証明はしていません．今回やる，ということを述べたはず.

質問 27： 平面曲線の基本定理の一意性はどうすれば示せますか.

お答え： 今回やる（と説明しました）.

質問 28： 平面曲線の基本定理があるのなら，曲面の基本定理もあるんでしょうか？もしくは曲面は複雑なので曲線みたく簡潔には表せない？

お答え： 教科書をさがしてみましょう.

質問 29： Frenet 枠はなぜ枠なのでしょうか．Frenet 行列とは言わないのですか.

お答え： 自分の身近では言いません．“frame” に “基底” のような意味を込めています.

質問 30： 先週のレポート問題 2-1 について，始めに $f'(x)<0$ となる x の近くで考える理由がわかりませんでした.

お答え： 平方根の符号を決めるためです（という説明をしたはず).

質問 31： 立体の曲率についてもしりたいです.

お答え： どういう立体を想定している？たとえば直方体とか？

質問 32： 黒板 8 枚目（確か）で x を y と書いていた気がする.（逆かもしれない）

お答え： 黒板の番号は覚えていないので，文脈を教えてください.

4 平面曲線の曲率

■曲率関数の性質

- パラメータのとり方によらない（標準的なパラメータに変換して定義しているから）.
- パラメータを s から $-s$ に変更する（曲線の向きを反転させる）と曲率は符号を変える.
- 曲線に回転と平行移動を施しても曲率は不変（テキスト 21 ページ，系 2.7；証明は後半）
- 曲線をある直線に関して折り返すと曲率は符号を変える（テキスト 27 ページ，問題 4）.
- 半径 $a > 0$ の左回り（右回り）の円の曲率は $1/a$ $(-1/a)$，直線の曲率は 0（テキスト 13 ページ，例 2.1）.
- 曲率円は曲線と 2 次の接触（テキスト 16 ページ，定義 2.3）をする，すなわち曲線を最もよく近似する円（テキスト 17 ページ，定理 2.4）.
- ガウス写像と曲率.

■フルネの公式

- フルネ枠（テキスト 22 ページの (2.15) 式に現れる $\mathcal{F}$）
- フルネの公式（テキスト 21 ページ，式 (2.14), 22 ページ (2.15)）
- 平面曲線の基本定理

■閉曲線　（概略のみを扱う）

- 閉曲線の定義（$\mathbb{R}/(l\mathbb{Z})$ 上で定義された曲線）
- 回転数（テキスト 29 ページ）
- 単純閉曲線と回転数（テキスト 31 ページ，定理 3.2）
- 閉曲線の正則ホモトピー類と回転数（テキスト 33 ページ，定理 3.3）
- 四頂点定理（テキスト 25 ページ，定理 2.10）

■線形常微分方程式の基本定理　以下の事実（付録 A-2 の「線形常微分方程式の基本定理」からの帰結）を用いる：

定理 4.1. 区間 I の点 $t_0 \in I$ を一つ固定する．区間 I で定義され，n 次正方行列に値をとる C^∞-級関数 $\Omega(t)$ が与えられたとき，I 上で定義された行列値 C^∞-級関数 $\mathcal{F}$ で，次を満たすものがただ一つ存在する：

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \mathcal{F}\Omega, \qquad \mathcal{F}(t_0) = I = n \text{ 次単位行列}. \tag{4.1}$$

証明は，常微分方程式論の教科書，あるいは「2019 年度幾何学特論 B1（2Q，MTH.B406）」の第 1 回講義ノート `http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2019/geom-b/index-en.html` を見よ.

系 4.2. 上の定理の状況で，さらに n 次正方行列 A が与えられているとする．このとき，I 上で定義された

2019 年 10 月 24 日

行列値 C^∞-級関数 $\mathcal{F}_A$ で，次を満たすものがただひとつ存在する．

$$\frac{d\mathcal{F}_A}{dt} = \mathcal{F}_A \varOmega, \qquad \mathcal{F}_A(t_0) = A \tag{4.2}$$

証明： (4.1) を満たす $\mathcal{F}$ に対して $\mathcal{F}_A = A\mathcal{F}$ (行列の積) とおけば，それが求めるものである．

領域 $U \subset \mathbb{R}^m$ と区間 $I \subset \mathbb{R}$ の直積 $I \times U$ 上で定義された C^∞-級行列値関数

$$\varOmega \colon I \times U \ni (t, \boldsymbol{\alpha}) \mapsto \varOmega(t; \boldsymbol{\alpha}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$$

を考える．ここで $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ は実数を成分とする n 次正方行列全体の集合で，写像 $\varOmega$ が C^∞-級とは，$\varOmega$ の各成分が C^∞-級関数となることである．以下 $t_0 \in I$ を一つ固定する．このとき $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ と $\boldsymbol{\alpha} \in U$ に対して

$$\frac{\partial \mathcal{F}(t; A, \boldsymbol{\alpha})}{\partial t} = \mathcal{F}(t; A, \boldsymbol{\alpha})\varOmega(t; \boldsymbol{\alpha}), \qquad \mathcal{F}(t_0; A, \boldsymbol{\alpha}) = A \tag{4.3}$$

を満たす行列値関数 $\mathcal{F}(t; A, \boldsymbol{\alpha})$ がただ一つ存在する．

命題 4.3. 上の状況で，

$$\mathcal{F} \colon I \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times U \ni (t, A, \boldsymbol{\alpha}) \mapsto \mathcal{F}(t; A, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$$

は $1 + n^2 + m$ 個の変数 t, A, $\boldsymbol{\alpha}$ に関して C^∞-級である．

証明は，「2019 年度幾何学特論 B1（2Q，MTH.B406）」の第 1 回講義ノート `http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2019/geom-b/index-jp.html` を見よ．

問題

4-1 弧長 s でパラメータづけられた曲線 $\gamma(s)$ の $s=0$ における曲率 $\kappa(0)$ は零でないとする．さらに左向き単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}(0)$ とするとき，点 $\mathrm{P}_0 := \gamma(0) + \frac{1}{\kappa(0)}\boldsymbol{n}(0)$ を $\gamma(s)$ の $s=0$ における曲率中心，P_0 を中心とする半径 $1/|\kappa(0)|$ の円 C_0 を $\gamma(s)$ の $s=0$ における曲率円という．このとき，

(1) C_0 は $\gamma(0)$ を通り，その点において $\gamma(s)$ と共通の接線をもつことを示しなさい．

(2) C_0 の弧長によるパラメータ表示 $\sigma(s)$ を，$\sigma(0) = \gamma(0)$, $\sigma'(0) = \gamma'(0)$ となるようにとる．このとき

$$\gamma(s) = \sigma(s) + o(s^2) \qquad (s \to 0)$$

であることを示しなさい．ただし $o(\cdot)$ はランダウの記号である．

4-2 区間 $I \subset \mathbb{R}$ で定義された C^∞-級写像 $\mathcal{F} \colon I \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ ($\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ は実数を成分とする $n \times n$-行列全体の集合) および $\varOmega \colon I \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ が

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt}(t) = \mathcal{F}(t)\varOmega(t), \qquad \mathcal{F}(t_0) = I = n \text{ 次単位行列}$$

を満たしているとする．ただし $t_0 \in I$ は固定された点である．このとき，

(1) 各 $t \in I$ に対して $\mathcal{F}(t) \in \mathrm{SO}(n)$ が成り立つための必要十分条件は，各 $t \in I$ に対して $\varOmega(t)$ が交代行列であることを示しなさい．

(2) 各 $t \in I$ に対して $\mathcal{F}(t) \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ が成り立つための必要十分条件は，各 $t \in I$ に対して $\operatorname{tr}\varOmega(t) = 0$ が成り立つことであることを示しなさい．ただし，$\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})\,;\, \det A = 1\}$.