2019 年 10 月 31 日 (2019 年 11 月 07 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一（MTH.B211）講義資料 5

お知らせ

- 次回 **11 月 7 日**に**定期試験の予告**を行います．皆様お誘い合わせの上ご出席ください．(定期試験は 11 月 21 日です．)

前回までの訂正

- **重要な訂正：**前回，定期試験を「11 月 14 日」と申し上げましたが「**11 月 21 日**」の誤りです．したがって，**定期試験予告は 11 月 7 日**となります．
- 板書（8 枚目だそうです）の $\int_0^s \kappa(u)\,du$ を $\theta(u)$ と書いたそうです．$\theta(s)$ の誤りです．
- 講義資料 3, 1 ページ，下から 13 行目：回答 ⇒ 解答
- 講義資料 4, 6 ページ，下から 5 行目：$s_0 \in I \Rightarrow t_0 \in I$ $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R}) \Rightarrow \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ （講義最後に述べた訂正は誤り）
- 講義資料 4, 6 ページ末尾：$\mathrm{SO}(n,\mathbb{R}) \Rightarrow \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$

授業に関する御意見

- 試験期間よりも前に試験を行なうのですね．単純に授業回数が少ないということでしょうか．　**山田のコメント：** すみません．
- マイクをつけていたのは分かったのですが，電源が入っていないような気がしました．　**山田のコメント：** 申し訳ありません．
- 話しながら黒板を動かすと話が聞き取れません．　**山田のコメント：** ごめんなさい．
- 曲線を上手く円に近似させて考えることができるのは便利そうですね．　**山田のコメント：** 道路の曲線半径はそういう考え方．
- 私は F1 を見るのが好きで，F1 のレースサーキットのある場所に「130R」という名前のものがあります．これって曲率半径が 130（単位はメートル？）という意味なのかと思いました．(授業中に車の例を出した際に既に説明していたらすみません）
  山田のコメント： 講義では「曲線半径」の話をしましたが，この 130R も同じようですね．R は radius の頭文字．
- 回転数が整数値しかとらないため，連続変形でかわることがない，ということがとてもしっくりきた．
  山田のコメント： そうだよね．
- 回転数のところで “位相との関連” が説明されていて興味がわきました．　**山田のコメント：** なのです．
- $\sigma(t) = (t, t^2)$ $(y = x^2)$ の回転数が $\frac{1}{2}$ であることがおもしろいと思った（考えてみればそれはそうという感じ)．
  山田のコメント： 地道に計算して，そのあとで「考えてみればそう」というのは納得するためのよいプロセスだと思います．
- Frunet flame (原文ママ：Frenet frame) 速度ベクトルと法線ベクトルを並べただけなのに，それだけですごいつかいやすそうなものに変化するのがすごい．　**山田のコメント：** ですよね．
- $\frac{d}{dt}\det A(t) = \operatorname{tr}(\widetilde{A}(t)\frac{d}{dt}A(t))$ $(\forall t \in I \subset \mathbb{R}$ に対し，$A(t) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $\widetilde{A}(t)$ は $A(t)$ の余因子行列）という式を初めてしりました．勉強になりました．　**山田のコメント：** 意外に知らない人がいますね．
- 行列の諸々の性質や定理に抜けがあることに気づきました．　**山田のコメント：** たいてい抜けてます．教えて初めて思い出す．
- 今回の問題 4-2 (2) が特に難しかったです．　**山田のコメント：** そう？
- 今回の問題も面白かった．　**山田のコメント：** 楽しんでください．
- 数学科でも火災がおきたそうですが，デジタル化を進めたら燃える紙がなくなるのかなと思いました．
  山田のコメント： 燃えるのは紙だけではありません．
- 授業では何言っているのか分からなかったが，家に帰って復習すると理解できることが多かった．　**山田のコメント：** よい．

質問と回答

質問 1： テキストの図 3-2 についての質問ですが，カージオイドの回転数についての記述がないのは，それが定義できないからなのでしょうか．回転数 1 から回転数 2 への曲線の変形の途中に現れるならば回転数 3/2 と言えそうな気がしますが...

お答え： この科目の範囲を超えますが，カージオイドは「波面」とよばれる特異点をもつ曲線で，単位法線ベクトルが滑らかに定義されます（必ずしも左向きとは限らない)．曲線を一周するにともなって，単位法線ベクトルは 1 回半回って始点に戻るとちょうど反対を向きます．このことから，回転数は 3/2 とみなせます．

質問 2： 前回の質問 4 のお答えに対する質問です．曲線が点 (x,y) の近くで $y=f(x)$ とグラフ表示できることは分かりました．しかし，これは大域的に $y=f(x)$ と表せてないのですがとくに問題ないのですか? これに対して自分で答えを考えたのですが，曲線は任意の点 (x,y) の近くで $y=f(x)$ とグラフ表示できる $\Leftrightarrow$ 大域的に $y=f(x)$ とグラフ表示できる，であってますか． **お答え：**正しい．パラメータ表示 $\gamma(t)=(x(t),y(t))$ をもつ曲線がグラフ表示できないとすると，$x(t_1)=x(t_2)$ $(t_1<t_2)$ となる t_1, t_2 が存在する．すると平均値の定理から $\dot{x}(t_3)=0$ $(t_1<t_3<t_2)$ を満たす t_3 が存在するが，この点の近くでは局所的にグラフ表示できない．

質問 3： 三次元空間の中では反対向きの円周を重ね合わせることができるので $\mathbb{R}^3$ 内の曲線には回転数は定義できないのでしょうか． **お答え：**一般に全曲率が 2π の整数倍になりません．

質問 4： 周期を持つ閉曲線 γ の回転数について例を沢山挙げていただきましたが，少し複雑なものになると混乱してしまいました．自己交叉によって γ を複数の閉曲線に区切ったとき，(回転数) = (左回りの閉曲線の数) − (右回りの閉曲線の数) という数え方で合っていますか？ **お答え：**自己交叉で区切って得られる曲線は一般に閉曲線になりません．このへんの議論は教科書 §3 をご覧ください．

質問 5： 自己交叉の回数に向きを符号付けしたものと数と回転数に何らかの関係式は存在しますか.

お答え： 教科書 37 ページ，定理 3.4.

質問 6： 回転数の式からは，全体で左または右に何回回転していたかの情報が得られないと思うのですが，個別に左まわり，右まわりを求めるにはどうすればいいのでしょうか．場合分けをせざるを得ませんか.

お答え： 「全体で左または右に何回転」とはどういう意味? また「個別」の「個々のもの」は何を想定しますか？

質問 7： Cauchy の平均値の定理（$\forall x\in[a,b]$, $\gamma'(x)\neq\mathbf{0}\Rightarrow\exists c\in[a,b]$, $\gamma'(c)/\!/(\gamma(b)-\gamma(a))/(b-a)$ の “/!/” を “=” だと思うと 4-1 (2) のニセ証明 $\gamma(s)-\sigma(s)=\gamma(s)-\sigma(0)-\bigl(\sigma(s)-\sigma(0)\bigr)=\bigl(\gamma'(s_1)-\sigma'(s_2)\bigr)s=(\gamma''(s_3)-\sigma''(s_4))o(s^2)$ (s_i は 0 と s の間の元)，$s\to0$ で $\gamma''(s_3)-\gamma''(s_4)\to\gamma''(0)-\sigma''(0)$: const ゆえ $\gamma(s)-\sigma(s)=o(s^2)$ $\Box$ ができるが，パラメータに適当な制限 (e.g. 弧長パラメータ) がついているときはこのような考え方が実際に使えませんか? **お答え：**(1) 「偽証明」が（平均値の定理の “=” を認めたとしても）正しくないと思います．４つめの等号はどうして成り立つ？円 σ の半径が γ の曲率半径と一致することをどこでも使っていないような気がするのですが，どんな円でも成り立つ？ (2) ここでの “Cauchy の平均値の定理” は何か仮定が必要ですよね．空間曲線では成立しませんから．(3) $(b-a)$ で割っているのはあまり意味がありませんね.

質問 8： C^∞-級だがテイラー展開できない（例：$f(x)=\{x \text{ if } x<0, \exp(-1/x) \text{ if } x\geqq0\}$ の場合でもなめらかな曲線が持つべき性質は成り立ちますか． **お答え：**はい，C^∞-級の仮定だけから得られる性質は成り立ちます（当たり前ですが)．ところで例の不等号ですが，等号のつく場所が違うと思います.

質問 9： 前回の演習問題 3-2 で，$\kappa(s)$ が 2 倍になるだけで図形としてまったく異なる理由を講義中話されていたのですが，その仕組みがよくわかりませんでした． **お答え：**曲線 $\gamma(s)$ を k 倍の相似拡大して $\hat{\gamma}(s)=k\gamma(s)$ とすると，曲率は $1/k$ 倍になる．しかし s は $\hat{\gamma}(s)$ の弧長パラメータではないという「状況説明」です.

質問 10： 弧長パラメータが平面曲線の基本定理や Frenet 枠や曲率など多く登場していますが，弧長パラメータ以外によく使われるパラメータ表示は何がありますか． **お答え：**グラフ表示 $x\mapsto(x,f(x))$ をよく使います.

質問 11： 弧長パラメータが速度ベクトルの大きさが 1 なのはわかりますが，速度の大きさが 1 のパラメータ表示が必ず弧長パラメータとなるのでしょうか．教科書 p. 12 には速度の大きさが 1 のパラメータ表示を弧長パラメータとよぶことにすると書いてありますが，全てが弧長をパラメータにしているのですか． **お答え：**ということが同じ 12 ページに書いてあります．速さが 1 のパラメータは，ある点から測った弧長と定数だけの差しかない.

質問 12： 曲率が周期 L をもっている場合の例として「γ が長さ L の閉曲線」を挙げていましたが，この時，右上図（山田注：図省略，講義で「ループ」として挙げたような絵）のようあとがった部分をもつようなものは今回の閉曲線には含めないという説明がありました．「なめらかな」閉曲線という条件を付け加えればそのような状況はさけられると考えたのですが，なぜこの例で閉曲線の意味をせばめるような注を入れたのですか．それともこの例に限らず閉曲線には図のようなものを含めないという習慣があるのですか． **お答え：**そのような習慣がある，と思ってください．もしも角のあるループを閉曲線の仲間に入れると，回転数の整数性が成り立ちませんね.

質問 13： 積分区間をいつも書いていないのは，あまり意味がないからですか？（積分定数も書かれていなかったので).

お答え： はい，この場合は「回転」と「平行移動」に対応するので気にしませんでした．もちろんきちんと書くべきです.

質問 14： うまいパラメータをもってくることで，曲線と二次近似する円をもってこれた．では他にうまいパラメータをとってくることで，曲線を 3 次近似してかつただの三次関数ではなくより図形的に意味があるものがもってこれるのではないかと疑問をもった.（ここでは図形的におもしろいを厳密に定義しないが.）

お答え： 面白い問題ですね．探してみましょう．曲線の表示を 3 次までテイラー展開してみると何かわかるかも.

質問 15： 任意の 2 次閉曲線をとり，自己交差を持つ場合，その点に重なるすべての点に異なる z 座標を考えてなめらかにつながるように空間曲線を作ります．上手く z 座標を与えればこの空間曲線は円と正則ホモトピー同値となるでしょうか． **お答え：**(1) 2 次曲線は自己交差を持たない．(2) 空間閉曲線で，円と正則ホモトピー同値でないもの（非自明な結び目）を平面に正射影すると自己交差をもつ閉曲線が得られるので正しくない．

質問 16： 今日の授業の板書 3-3 において，$s=\int_0^t\sqrt{1+4u^2}\,du$ （以降 $\int_0^t\sqrt{1+4u^2}\,du$ を $u(t)$ と書きます）と弧長を計算した後「$\kappa(s)\,ds=\kappa(t)\,|\dot\gamma|\,dt$」と書いてありましたが，正しくは「$\kappa(s)\,ds=\kappa(u(t))\,|\dot\gamma|\,dt$」ではありませんか． **お答え：**はい，そう書くべきかもしれませんが，教科書の記法と揃えて，独立変数の変換を明示していません．よく物理学などで使う記法です．ちなみに $u(t)$ と書くより $s(t)$ と書いた方が自然では？

質問 17： 曲率はなぜ “左向き” 単位法線ベクトルで定義するのですか? **お答え：**反時計回りの円の曲率を正にしたい．

質問 18： 平面曲線の基本定理の uniqueness の証明のときに Frunet flame (原文ママ：Frenet frame のことか？) を使っていたのには理由はあるのでしょうか？ Frunet flame を使わなくても $\boldsymbol{e}(s)=(\cos\theta(s),\sin\theta(s))$ と書けることを使って導けそうですがどうなのでしょうか． **お答え：**前半：空間曲線の基本定理の証明に使える形にしたかった．後半：簡単にできます．やってみてください．

質問 19： 曲率が図形の曲がり具合を表しているというのはわかるのですが，加速度の大きさになっているというのがすんなりと納得できずにもやもやしています．加速度は弧長パラメータの 2 階微分なので，という考え方だけしていればよいでしょうか． **お答え：**「加速度は弧長パラメータの 2 階微分」という文に意味がないと思います．弧長パラメータ「を」微分する？一定の速さでカーブに差し掛かったとき，カーブがきつい方が加速を感じませんか？

質問 20： 4-1 (2) で $\sigma(s)$ の曲率が $\kappa(0)$ となることを図でなく数式だけで求める方法を教えて下さい．

お答え： C_0 を具体的にパラメータ表示する．

質問 21： 4-1 (2) は解けなかったのですが，この問題の示すべき式にランダウの記号がありますが，自分が知っている範囲ではテイラー展開を学習したときに使った記憶があります．これらは関連があるのでしょうか．

お答え： はい，この問題は「テイラーの定理を使う」と講義で説明したはず．

質問 22： ランダウの記号が苦手なので，どのように便利なのかよくわかりません． **お答え：**そうですか．

質問 23： 「正則な平面曲線と曲率関数は 1 対 1 対応である」は正しいですか． **お答え：**正則な平面曲線全体「回転と平行で移り合うものは同一視」したものと 1 対 1 対応，ということを講義で説明しましたね．

質問 24： $\kappa(s)$ のある区間での積分が，接ベクトルの角度変化の総量を表しているのが分かりませんでした．具体的には $\gamma(s)$ の接ベクトル $e(s)$ の $e(s)$ から $e(s+ds)$ （ds は微小）までの変化量を考えたとき，その量は $e'(s)\,ds=\boldsymbol{n}(s)\cdot\kappa(s)\,ds$ になると考えましたが，これは $e(s)$ に対する鋭直方向（原文ママ：鉛直方向？）の変化です．この鋭直方向の変化量を足し合わせることが角度の総変化量を求めることになる理由がわかりません．

お答え： $\boldsymbol{e}(s)=(\cos\theta(s),\sin\theta(s))$ と書くと $\theta'(s)=\kappa(s)$ が成り立つ，というのが講義で説明した内容．

質問 25： レムニスケートの回転数が 0 というのがよくわからない（定義通りに計算すればそうなるのはわかるが）．他の回転数 ±1 や ±2 の曲線の例は直観的にはなんとなくわかるが，なにかよいイメージはあるのでしょうか．

お答え： 前半：レムニスケートの回転数をちゃんと定義通り計算してみましたか？後半：講義で説明した，単位接ベクトルが何回まわるか，というのではだめですか？

質問 26： 閉曲線の連続的な変形で回転数が変わらないのは，その変形で回転数も連続的に変化するからですか？

お答え： はい，そう説明しましたよね．

質問 27： 曲率は $\kappa(t)=\frac{|\dot\gamma\ \ddot\gamma|}{|\dot\gamma|^3}$ で定義しましたが，どのようなモチベーションで定義したんでしょうか．つまり $\frac{|\dot\gamma\ \ddot\gamma|}{|\dot\gamma|^3}$ の図形的な意味がわかりません．曲率は本質的に何を表しているのでしょうか． **お答え：**ご質問の定義は第 1 回講義での仮の定義．定義は「弧長 s で表示したときの $\boldsymbol{e}'=\kappa\boldsymbol{n}$ となる関数 κ （$(\boldsymbol{e},\boldsymbol{n})$ は曲線のフルネ枠）．一般のパラメータでの表示は教科書 14 ページ．本質的には「多義的」．

質問 28： 曲率は「曲がり具合」と「曲がる方向」を表しているのに対し曲率は正の値しか取らないので，曲がり具合しかわかりません．それなのにどうして道路標識では曲率半径の方を採用しているのでしょうか（恐らくその方が感覚的にわかりやすいのでしょうが，「半径 400m の円」と言われても僕にはどの程度の曲がり方なのか分かりません.） **お答え：**最初の文の意味がどう読んでもわかりません．

質問 29： 立体上で曲がりぐあいを近似するときは球をつかうということでしょうか． **お答え：**講義資料 4，質問 20.

質問 30： 行列の微分を定義しましたが，これを ε や δ を使った定義にすることはできますか？

お答え： 1 変数関数の微分の定義を ε-δ を用いて書きますか？通常は lim を使うのではないでしょうか．そして極限の定義を ε-δ を用いて述べるのでは? すなわち行列値関数の極限をどう定義するか，ということですよね．

質問 31： いい質問が思いつかないのでもっと勉強します． **お答え：**ぜひ．

5 空間曲線

■準備：外積

- 基底の正負（教科書 204 ページ）
- 外積（教科書 207 ページ）

■空間曲線の曲率と捩率

- 弧長によってパラメータ付けられた曲線（教科書 51 ページ）
- 単位接ベクトル $\boldsymbol{e}$, 主法線ベクトル $\boldsymbol{n}$, 従法線ベクトル $\boldsymbol{b}$, 曲率 κ, 捩率 τ （教科書 51–52 ページ）
- フルネ・セレの公式（教科書 54 ページ）

■曲率・捩率の図形的な意味

- 平面曲線となるための必要十分条件/ブーケの公式.

問題

5-1 正の定数 a, b に対して空間曲線 γ を

$$\gamma(t) := (a\cos t, a\sin t, bt)$$

で定める．

(1) γ の曲率と捩率を求めなさい.

(2) $t=0$ における γ の単位接ベクトル，主法線ベクトル，従法線ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_0$, $\boldsymbol{n}_0$, $\boldsymbol{b}_0$ とし，Π_1, Π_2, Π_3 をそれぞれ，$\{\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{n}_0\}$，$\{\boldsymbol{n}_0, \boldsymbol{b}_0\}$，$\{\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{e}_0\}$ で張られる $\mathbb{R}^3$ の部分空間（原点を通る平面）とする．γ の Π_j への正射影の曲率 $\kappa_j(t)$ $(j=1,2,3)$ を求めなさい.

5-2 弧長 s によりパラメータ付けられた空間曲線 $\gamma(s)$ の曲率がいたるところで零にならないとする．さらに，s によらない一定な単位ベクトル $\boldsymbol{v}$ で $\gamma'(s)$ と一定の角をなすものが存在するとき，$\gamma(s)$ の曲率 $\kappa(s)$ と捩率 $\tau(s)$ は比例することを示しなさい.

2019 年 10 月 31 日 (2019 年 11 月 07 日訂正)