2019 年 11 月 7 日 (2019 年 11 月 14 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一（MTH.B211）講義資料 6

お知らせ

- 今回，定期試験 (11 月 21 日) の予告をします．欠席された方は OCW，講義 web をご確認ください．

前回までの訂正

- 前回の「質問と回答」において回答もれがあったようです：**質問：**今回の問題で，正直円の弧長パラメータ表示くらいなら条件をみたら弧長パラメータ表示はこれであると書いて進みたかったんですが，その求め方まで試験に書いたほうがよいでしょうか．**お答え：**どちらでも．ていうか試験のことなど気にするな．意味が通れば正解にする．
- 前回の質問 28 について，2 番目の「曲率」は「曲率半径」の誤りでした．曲率が 1 のときも -1 のときも曲率半径は 1 ということです（というご本人からのコメント）．
- 講義資料 5, 1 ページ，最後の行：みなすせます $\Rightarrow$ みなせます

授業に関する御意見

- 試験が 1 週間ずれて残念でした．　**山田のコメント：** ごめんなさい．
- マイクがちゃんと声を拾えていますか？　**山田のコメント：** ちょっと不安．また試してみます．
- やっぱり時間足りないです（言い訳な気はする）．　**山田のコメント：** すみません，こちらの処理時間の都合です．
- 授業中「左手系はケンカを売っているのかな」とおっしゃっていましたが，残念ながら世の中には左手系があふれています．たとえばゲームエンジンとして有名な Unity は左手系でオブジェクトの配置，運動等が行われます．非常に腹立たしいです．
  山田のコメント： 講義でも少しコメントしたかと思いますが，この業界ではディスプレイの平面と depth で $\mathbb{R}^3$ を張るという定式化で始まったようなので，左手系が自然になるらしいですね．外積をとるときなどに注意が必要です．
- 今まで漠然と式の意味を理解せずに式計算をしていることが多くありましたが，文字の意味を考えることによって今行っている計算が何をどのようにして求めているかがわかり，計算の道筋がたやすくなりました．　**山田のコメント：** 慣れていこう．一方「数式の計算」は意味を考えずに自動的に答えが出せる一種の「ハイテク」でもあるので，意味にこだわり過ぎるのもよくない．
- 立体になると考えることが増えて難しいです．　**山田のコメント：** 数学のこの文脈では「立体」ではなく「空間」「3 次元空間」「3 次元ユークリッド空間」などという言い方をすることが多いので慣れてください．
- Frenet-Serret Formula のように二次元で成り立っていたものが三次元へとうまく拡張できてるのはうれしい．陪法線はシャレがきいててきらいではないです．　**山田のコメント：** 同意．
- ある概念を高次元に拡張するときう，何をもって自然な拡張であると判断するか，そもそもその概念において自然な拡張とはなにか，拡張すべき概念化，ある次元の固有の概念であるかといろいろ考えるのは面白いですが，判断するのは難しいですね．
  山田のコメント： はい．拡張の自然さは，論理というよりは数学の「見え方」なんでしょうね．
- 空間曲線の Frunet frame (原文ママ：Frenet のことか？) も直交行列で，微分のときに出てくる Ω も交代行列... 平面曲線の拡張ってかんじがしてとてもたのしい．　**山田のコメント：** Frame の綴りは正しくなりましたが Frenet が惜しいですね．
- 「イメージを与えるとそれが独り歩きしてしまうから」というお話，なるほどなぁと思いました．　**山田のコメント：** でしょ．
- 弧長パラメータの意味がようやくわかってきた．　**山田のコメント：** よかった．
- 計算量がすごかったです/5-1 の計算がとても重かったです．　**山田のコメント：** そうかもね．
- 正射影を考えたあと，新たに弧長パラメータ表示するかでまよった．　**山田のコメント：** 弧長表示するのは難しいよね．

質問と回答

質問 1： 空間曲線の基本定理において κ, τ がともに正のとき κ を曲率，τ を捩率としてもつ空間曲線と，τ を曲率，κ を捩率としてもつ空間曲線の間に何か関係はあるのでしょうか．

お答え： なるほど．ヒント：${}^tP\Omega P = \Omega'$, ただし $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$, $\Omega' = \begin{pmatrix} 0 & -\tau & 0 \\ \tau & 0 & -\kappa \\ 0 & \kappa & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

質問 2： 捩率が接触平面からの離れ具合を表す（教科書 P52）ことがよく分からなかったので，以下のことを考えました．$(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ を基底としてみたときの接触平面の鋭直成分（原文ママ）$\gamma(s) \cdot \boldsymbol{b}(s)$．これを微分すると，(中略) $\gamma = a\boldsymbol{e} + b\boldsymbol{n} + c\boldsymbol{b}$ とおくと (中略) $(\gamma \cdot \boldsymbol{b})' = b\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{b}'$．よって $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{b}'$ の大きさが接触平面からの離れ具合と見ることができる．以上の考えに間違っているところがあれば教えて頂きたいです．　**お答え：**漢字以外間違っていない．

質問 3： 正則曲線でない C^∞ の曲線 $\gamma(t)$ において，どう弧長パラメータや曲率を定義するか，という質問ですが，

$|\gamma'(t)|=0$ となる t が点でしか存在しなければ弧長は狭義単調増加なので逆関数が存在します．つまり弧長パラメータが定義でき，$|\dot\gamma(t)|\neq 0$ となる点で授業と同じように曲率が定義されると思ってよろしいでしょうか．
これまで初めから正則な曲線でしか曲率や弧長パラメータを定義していなかったので，今回の問題を解く際，$|\gamma'(t)|=0$ となる点がでてきてしまい戸惑いました． **お答え：**それが狙い．一つの射影は特異点をもつのでその点で曲率が定義できない．特異点が孤立している場合，その点以外では曲率が定義できるが，極限はいろいろ．

質問 4： 空間曲線の曲率，捩率が与えられた関数 $\kappa(s)$, $\tau(s)$ に一致するような $\gamma(s)$ を具体的に書き下すことができなのは（うまく言語化できないが） $\dot\gamma(s)$,（曲率が $\dot\gamma(s)$ に与える影響），（捩率が $\dot\gamma(s)$ に与える影響），$\boldsymbol{n}(s)$, $\boldsymbol{b}(s)$ が影響しあって三体問題のような状況になっているからでしょうか． **お答え：**「三体問題のような」かどうかはわかりませんが，微分方程式が求積法で解けない（第一積分が存在しない）という意味ではそうかもしれません．

質問 5： 直線が $x+y=c$, 円が $x^2+y^2=c$ という形をしていて，こいつらで曲線の 1 次近似，二次近似（山田注：算用数字と漢数字を混ぜる？）できる．一船に（原文ママ：一般に？）$x^n+y^n=c$ というものは曲線の n 次近似になるのではないかとぎもんをもった（ただし回転や平行移動を許したとき） **お答え：**曲線 $x^n+y^n=c$ は $y=\sqrt[n]{c-x^n}=\sqrt[n]{c}-\frac{1}{\sqrt[n]{c^{n+1}}n}x^n+\dots$ と展開できるので，多項式のグラフで近似することと同じになります．

質問 6： 空間曲線では，講義では曲率は 0 をとらないことにしていましたが，曲率が 0 になる点があるとき，この点での主法線ベクトル，従法線ベクトルをどのように定義してもこれらの法線ベクトルは不連続になってしまうと思います．このような定義でどのような不都合が想定されますか？ **お答え：**不連続になる場合もならない場合もある．不都合があるのでここでは考えないことにするが，$\kappa=0$ の近くではまた別のタイプの枠をとることが多い．

質問 7： $\mathbb{R}^n$ において $n-1$ 個の曲率があるとのことでしたが，その存在はどのように示されるのでしょうか．

お答え： $\mathbb{R}^n$ の曲線 $\gamma(s)$ （s は弧長）を考える．(1) $\boldsymbol{e}_1(s):=\gamma'(s)$ は単位ベクトルなので $\boldsymbol{e}_1'(s)\perp\boldsymbol{e}_1(s)$．特に $\boldsymbol{e}_1'$ が常に零にならないとき，$\boldsymbol{e}_1'(s)=\kappa_1(s)\boldsymbol{e}_2(s)$ をみたす C^∞-級関数 $\kappa_1(s)$ と単位ベクトルに値をもつ関数 $\boldsymbol{e}_2(s)$ が存在する（ここまでは空間曲線と同じ）．(2) $\boldsymbol{e}_2'\perp\boldsymbol{e}_2$ だが，$\boldsymbol{e}_1$ と直交するとは限らない．いま $\boldsymbol{e}_2'-(\boldsymbol{e}_2'\cdot\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2'+\kappa_1\boldsymbol{e}_1$ は $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ に直交するので，（これが常に零でないとすると）$\boldsymbol{e}_2'=-\kappa_1\boldsymbol{e}_1+\kappa_2\boldsymbol{e}_3$ となる関数 $\kappa_2>0$ と単位ベクトル $\boldsymbol{e}_3$ が存在する．(3) $\boldsymbol{e}_3'$ は $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_3$ に直交するので同様に $\boldsymbol{e}_3'=-\kappa_2\boldsymbol{e}_2+\kappa_3\boldsymbol{e}_4$ となる κ_3, $\boldsymbol{e}_4$ が存在する．(4) これを繰り返すと，（適当な仮定のもと）正規直交系 $\{\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_{n-1}\}$ と正値関数 κ_1, κ_{n-2} で $\boldsymbol{e}_j'=-\kappa_{j-1}\boldsymbol{e}_{j-1}+\kappa_j\boldsymbol{e}_{j+1}$ $(j=1,\dots,n-2)$ となるものが存在する．(5) 以上のもと $\{\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_{n-1},\boldsymbol{e}_n\}$ が正の正規直交系をなすような $\boldsymbol{e}_n$ が存在する．そこで $\kappa_{n-1}:=-\boldsymbol{e}_n'\cdot\boldsymbol{e}_{n-1}$ とおく．（まとめ）この $(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)$ を γ の**フルネ枠**，関数 κ_1, …, κ_{n-1} をそれぞれ第 1 曲率，…，第 $(n-1)$ 曲率とよぶ．

質問 8： 4 次元空間の曲線を考えるとき，外積の拡張として 3 項演算 $\{\ \}$ を $\boldsymbol{a}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $\boldsymbol{b}=(y_1,y_2,y_3,y_4)$, $\boldsymbol{c}=(z_1,z_2,z_3,z_4)$ に対し（中略：3 つのベクトルの「外積」）と定め，$C:\gamma(s)$: 弧長パラメータ表示に対し，$\boldsymbol{e}=\gamma'(s)$, $\kappa_1(s)=|\gamma''(s)|$, $\kappa_2=|\gamma'''(s)|$, $\boldsymbol{n}_1=\frac{\gamma''(s)}{\kappa_1(s)}$, $\boldsymbol{n}_2=\frac{\gamma'''(s)}{\kappa_2(s)}$, $\boldsymbol{b}=\{\boldsymbol{e},\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\}$ とするとき，$\tau(s)=\sqrt{(\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{n}_1)^2+(\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{n}_2)^2}$ ($\leftarrow$ ここが自信ないです) と定めれば 4 次元への拡張ができるのでしょうか．

お答え： 残念，惜しいです．ご質問ような定義だと $\boldsymbol{n}_2$ が $\boldsymbol{e}$ や $\boldsymbol{n}_1$ に直交するとは限りません．

質問 9： （山田注：誤りの指摘でしたが議論の余地ありなのでここに掲載）問題 5-2 において「変数 x, y が比例する」ことの定義が「$\exists k\neq 0$ s. t. $y=kx$」であるとすると，問題の仮定を満たし $\tau\equiv 0$ となるものが存在して κ と τ が比例しないことになります（定義は Wikipedia 調べ）．したがって，プリント p 4 下から 1 行目「$\gamma(s)$ の曲率 $\kappa(s)$ と捩率 $\tau(s)$ は比例すること」$\Rightarrow$「$\kappa(s)$ と捩率 $\tau(s)$ は比例するかまたは $\tau(s)\equiv 0$ となること」とすべきだと思います． **お答え：**なるほど．一方が 0 の時に曖昧さがありますね．ご提案の定義では「x と y が比例する」というのは x と y に関して対称ではないのですが，適切でしょうか．「y が x に比例する」なら適切かも．ここでは「$ax+by$ が恒等的に零となるような定数の組 $(a,b)\neq(0,0)$ が存在する」ことを「比例する」といっています．

質問 10： κ と τ が与えられていて，$\kappa=0$ となる点があっても空間曲線を与えられることはありますか．

お答え： $\kappa=0$ のときに τ をどう定義しましょうか？

質問 11： 5-1 の (1) で正射影の曲率を求めろというのは，空間における曲率，平面における曲率どちらなのでしょうか．また，次回説明すると言っていたのはどちらの曲率ですか． **お答え：**絶対値は一致する．

質問 12： 5-1 の (2) の問題の計算が複雑になってしまったのですがもっとうまい計算のしかたがあったのでしょうか **お答え：**ない．

質問 13： 平面曲線の曲率の定義は $\kappa(s)=|\gamma'(s),\gamma''(s)|$ ですが，なぜ空間曲線の曲率の定義は $\kappa(s)=|\gamma''(s)|$ なのですか（ただし s は弧長）．平面曲線と空間曲線の違いは次元（軸）が増えることだと思うんですが，そうすると，$\gamma'(s)$ が定まったときに $\gamma''(s)$ は平面曲線の方がより定まりやすく感じるのに，空間曲線の曲率が $\gamma''(s)$ だけで書かれるのが不思議です． **お答え：**だから $\kappa(s)$ だけでは曲線がきまらない．

質問 14： 今回，問題 5-1 を解くときに私は先に γ のパラメータを弧長に変換しました．私の主観としては弧長でパラメータ表示してある方がそうでないよりも計算が簡単でとき易いのですが，今回はパラメータ変換した結果 $\sqrt{a^2+b^2}$ がでてむしろ複雑になってしまったかもと後々思いました．($\sqrt{a^2+b^2}=c$ のような置き換えをすれば解決したと思いますが)．弧長でパラメータ表示するよりも他の変数でパラメータ表示した方が分かりやすくなるということは良くあることなのでしょうか． **お答え：**はい．第 2 回の犬跡線は弧長でない助変数の方が自然？

質問 15： もしかしたら既出の話かも知れませんが Frunet (原文ママ：Frenet) frame と Ω について $\frac{d}{ds}F(s)=F(s)\Omega(s)$ とかけることと $\frac{d}{ds}\exp(A(s))=\frac{d}{ds}A(s)\cdot\exp(A(s))$ とかけることってなにか関連ありますか？ $A(s)$ が直交行列だったら $\exp(A(s))$ が交代行列であることもなんか関連がある気がするのですが... **お答え：** $\frac{d}{ds}\exp(A(s))=\frac{d}{ds}A(s)\cdot\exp(A(s))$ は一般に成立しない．また A が直交行列なら $\exp A$ は交代行列，ではない．

質問 16： $\{\boldsymbol{e},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}\}$ が右手系とは，右手，親指，人，中で，$\boldsymbol{e}$ が親，$\boldsymbol{n}$ が人，$\boldsymbol{b}$ が中になるように直交して座標など考えるということでよいですか？ **お答え：**「直交して座標など考える」の意味がわかりませんが，それを除けば良い．

質問 17： $x^2+y^2+z^2-1=0$ は球面と呼ぶのに，$x^2+y^2-1=0$ はあまり円周とは呼ばずに円と呼ぶのが腑に落ちないです． **お答え：**習慣だが，(球面，球) と対応するのは (円，円板)．英語では (sphere, ball), (circle, disk) .

質問 18： 定義に「up to」と書いてあったのですが，どういう意味ですか？英会話では「～ 次第」などと使いますが，数学的にも同じように捉えてよいですか？ **お答え：**“unique up to ～” で「～ をのぞいて一意」という言い回し．

質問 19： $t(s)=-\boldsymbol{b}'(s)\cdot\boldsymbol{n}(s)$ （原文ママ：左辺は $\tau(s)$ のことか？）で $-$ をつけるのはなぜですか？習慣だとしたらマイナスをつけなくなりそうな気がしますが（マイナスを付けないほうがきれいな感じがする.）

お答え： マイナスを付けない流儀もある，「こういう曲線の捩率を正としたいから」という説明を講義でやりました．

質問 20： 2 次元から 3 次元に拡張して考えましたが，同様に曲率はより高次元に拡張できるのでしょうか/ 4 次元以上の空間の曲線には曲率や捩率，あるいはそれに似たものが定義されていますか/ 平面曲線の場合と違い，空間曲線を一意に決定するには曲率に加えて捩率が必要ですが，これは 4 次元，5 次元...と次元が増えるごとに「〇〇率」と呼ぶべきものが 1 つずつ増えていく，ということでしょうか/ 曲率や捩率を定義してフルネ枠について「$\frac{d\mathcal{F}}{ds}=\mathcal{F}\Omega$」という関係が $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ 上で得られましたが，これは $\mathbb{R}^n$ 上の曲線 ($n\geqq 4$) に対しても何らかの形で一般化できるのでしょうか/ フルネ枠が正則でないので，見るからに面倒そうですが，4 次以上の場合でもフルネ枠は定義できますか？ **お答え：**できると講義で述べた．レシピは質問 7 の回答参照．ちなみにフルネ枠は正則．

質問 21： 弧長パラメータで表せない関数はありますか（ディリクレ関数とかは？） **お答え：**「関数を弧長パラメータで表す」とはどういうことか？曲線ならわかるが．ディリクレ関数は C^∞ 級？

質問 22： 捩率は平面からのはなれぐあい，とあったのですが，具体的にはどの平面ですか． **お答え：**「接触平面」．

質問 23： 曲率円ならぬ捩率円はありますか？ **お答え：**空間曲線の曲率円はどう定義しますか？

質問 24： 平面においては回転数がありましたが，3 次元では回転数に近いものは存在するのでしょうか?

お答え： なにを「近い」とするかによると思います．講義資料 5 の 2 ページ，質問 3 参照．

質問 25： SO(2) は原点回りの回転行列全体の集合でしたが，SO(3) も同様に原点回りの回転行列全体の集合となるのでしょうか．(SO(3) $\supset$ { 原点回りの回転行列全体 } は分かるのですが，$\subset$ が分かりません)．

お答え： 「原点回りの回転」とは何でしょう．その定義がわからないと $\supset$ もわからないと思います．この講義では SO(3) の元による線形変換を「原点の回りの回転」としています（第 1 回の講義）．

質問 26： 空間曲線 $\gamma(t)$ を $\{\boldsymbol{e}_0,\boldsymbol{n}_0\}$ で張られる平面への正射影した曲線の式 $\sigma(t)$ が $\sigma(t)=\{\gamma(t)\cdot\boldsymbol{e}_0\}\boldsymbol{e}_0+\{\gamma(t)\cdot\boldsymbol{n}_0\}\boldsymbol{n}_0$ となることは直感的には分かるのですが，厳密な導出はありますか？ **お答え：**「直感的に分かるが厳密な導出はできない」という方はたいてい厳密な「定義」がわかっていません．正射影の定義はなんでしょう．

質問 27： 5-1 の (2) の $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ にの計算結果に数学的な意味があると授業中におっしゃっていたと思うのですが，計算結果をみてもイマイチわからなかったので教えてください．

お答え： 「イマイチ」の意味がいまいちわからない．山田の理解では「いまひとつ」の省略形なので，少し手前まではわかっている，という意味と解釈できる．どのへんまでわかっていますか？この内容は講義で扱います（と述べた）．

質問 28： 曲率が一定じゃないとき，曲率を求めよといわれたら，自分で弧長パラメータを与えたときは必ずもとのパラメータにもどして答えたほうがいいですか？それともきれいな形になったら弧長パラメータのままで答えた方がいいですか？ **お答え：**どちらでも意味が通じれば良い．

質問 29： 平面曲線を空間曲線として見ることもあるのでしょうか． **お答え：**はい（としか言いようがない）．

質問 30： 図で従法線の向きが反対ではないのですか． **お答え：**どの図か特定していただかないとお答えできません．

質問 31： 人から聞いたイメージに囚われると拡張できない，数をこなせば慣れる，というのはもっともだと思った．少し反省している． **お答え：**そういうものだと思ってます．

6 空間曲線の基本定理

■今回用いる事実 以下の事実（付録 A-2 の「線形常微分方程式の基本定理」からの帰結）を用いる：

定理. 区間 I の点 $t_0 \in I$ を一つ固定する．区間 I で定義され，n 次正方行列に値をとる C^∞-級関数 $\Omega(t)$ が与えられたとき，I 上で定義された行列値 C^∞-級関数 $\mathcal{F}$ で，次を満たすものがただ一つ存在する：

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \mathcal{F}\Omega, \qquad \mathcal{F}(t_0) = I = n \text{ 次単位行列}. \tag{6.1}$$

証明は，常微分方程式論の教科書，あるいは「2017 年度幾何学特論 B1（2Q，MTH.B406）」の第 1 回講義ノート `http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2017/geom-b/index-jp.html` を見よ．

系. 上の定理の状況で，さらに n 次正方行列 A が与えられているとする．このとき，I 上で定義された行列値 C^∞-級関数 $\mathcal{F}_A$ で，次を満たすものがただひとつ存在する．

$$\frac{d\mathcal{F}_A}{dt} = \mathcal{F}_A\Omega, \qquad \mathcal{F}_A(t_0) = A \tag{6.2}$$

証明： (6.1) を満たす $\mathcal{F}$ に対して $\mathcal{F}_A = A\mathcal{F}$ (行列の積) とおけば，それが求めるものである．

問題

6-1 空間曲線 $\gamma(s) = {}^t(x(s), y(s), z(s))$ は弧長 s でパラメータづけられているとする．さらに，γ のフルネ枠 $(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ が

$$\boldsymbol{e}(0) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{n}(0) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}(0) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

を満たし，$\gamma(0) = \mathbf{0}$ とするとき，$s = 0$ を中心とした $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ のテイラー展開の 3 次までの係数を，$\kappa(0)$, $\tau(0)$, $\kappa'(0)$, $\tau'(0)$, ... を用いて表しなさい．

6-2 空間曲線 γ の曲率を κ (> 0)，捩率を τ とする．空間曲線 $\tilde{\gamma}$ の曲率が κ，捩率が $-\tau$ であるならば，$\tilde{\gamma}$ と γ は向きを反転する $\mathbb{R}^3$ の等長変換で移り合う，すなわち

$$\tilde{\gamma} = A\gamma + \boldsymbol{a}, \qquad (A \in \mathrm{O}(3); \det A = -1, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3)$$

となる A, $\boldsymbol{a}$ が存在する．このことを示しなさい．

ヒント：$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-\kappa&0\\\kappa&0&-\tau\\0&\tau&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-\kappa&0\\\kappa&0&\tau\\0&-\tau&0\end{pmatrix}$.

2019 年 11 月 7 日 (2019 年 11 月 14 日訂正)