2019 年 11 月 14 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一（MTH.B211）講義資料 7

お知らせ

- 今回の課題はありません．
- 次回 **11 月 21 日**に定期試験を行います．予告は前回 11 月 7 日に行いましたが，欠席された方は OCW，講義 web ページから「定期試験予告」の文書をダウンロードしておいてください．
- 授業評価アンケートにご協力ください．科目コードは **MTH.B211** です．
- 講義は今回で終了です．ご聴講ありがとうございました．

前回の補足

前回講義の最後に述べた内容：$\kappa(s)=\alpha\varphi(s)$, $\tau(s)=\beta\varphi(s)$ ($\varphi(s)$ は正値関数，$\alpha>0$, β は定数) のとき，

$$(*)\qquad \frac{d\mathcal{F}}{ds}=\mathcal{F}\varOmega \qquad \varOmega=\begin{pmatrix}0 & -\kappa & 0\\ \kappa & 0 & -\tau\\ 0 & \tau & 0\end{pmatrix}$$

の解は具体的に求められる．実際，次に従えば良い．いま，

$$u(s):=\int_{s_0}^{s}\varphi(v)\,dv$$

とおくと，u は単調増加関数なので，逆関数 $s=s(u)$ が存在する．この変数変換で，式 (*) の独立変数を u に変換すると，$d/du=\varphi(d/ds)$ に注意して

$$(**)\qquad \frac{d\mathcal{F}}{du}=\mathcal{F}\varOmega', \qquad \varOmega'=\begin{pmatrix}0 & -\alpha & 0\\ \alpha & 0 & -\beta\\ 0 & \beta & 0\end{pmatrix}$$

を得る．$\varOmega'$ は定数行列なので，

$$\mathcal{F}=\exp u\varOmega'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}(\varOmega')^n$$

は (**) の解となり，変数変換 $u=u(s)$ で (*) の解が得られた．ここで $\varDelta=\alpha^2+\beta^2$ とおくと，

$$(\varOmega')^{2m}=(-1)^m\varDelta^{m-1}\begin{pmatrix}\alpha^2 & 0 & -\alpha\beta\\ 0 & \varDelta & 0\\ -\alpha\beta & 0 & \beta^2\end{pmatrix},\quad (\varOmega')^{2m+1}=(-1)^m\varDelta^{m}\begin{pmatrix}0 & -\alpha & 0\\ \alpha & 0 & -\beta\\ 0 & \beta & 0\end{pmatrix}$$

なので $\exp u\varOmega'$ は具体的に求めることができる．

前回までの訂正

- 講義 web ページの「定期試験予告」のリンクが誤っていました．修正済みです．
- 問題 5-1 の解説で $|\dot\gamma(s)|=\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}1$ と書いたそうです．左辺は $|\gamma'(s)|^2$ です．
- 問題 5-1 の解説で $\boldsymbol{b}'=\left(\frac{b}{c^2}\cos\frac{s}{c},\frac{b}{c^2}\sin\frac{s}{c},\frac{a}{c}\right)$ と書いたそうです．正しくは $\boldsymbol{b}'=\left(\frac{b}{c^2}\cos\frac{s}{c},\frac{b}{c^2}\sin\frac{s}{c},0\right)$.
- 講義資料 6，2 ページ，質問 2 の回答：質問ような ⇒ 質問のような
- 講義資料 6，3 ページ，一番下：そいうもの ⇒ そういうもの

授業に関する御意見

- 6-2 について，ヒントは使いませんでした（僕がまちがっているのかも？） **山田のコメント：** 様々な方法があるでしょうね.
- 幾何学ば微分方程式につながるのは面白いですね. **山田のコメント：** 微分幾何学はどこでも微分方程式がでてきます.
- テストで持ち込める紙に書いてある内容に関しての採点はあるのでしょうか？（ないならば回収する理由が謎です）
  山田のコメント： 採点はしません．回収する理由は講義の時間に説明しました．(1) 笑う．(2) 不正防止.
- 授業でやった内容が少しかわって問題に出てくるのが面白かった. **山田のコメント：** でしょ.
- 4Q はこの講義を取れないので僕は悲しいですが，先生は採点が減って楽かも知れません. **山田のコメント：** 残念です.
- 本に書いてある所帯と筆で書くときの書体が異なる文字は，初学者にとって一種の壁のように感じます.
  山田のコメント： そうかも知れません．生身の人間による講義で伝わるのでしょうか．五線譜の「ハ音記号」も手書きと印刷で大きく違いますね.
- 今日「ギリシャ文字は書けるよね？」という質問で少しドキッとしました．あまり得意ではないので. . . 特に ξ は難しいです.
  山田のコメント： 得意でない，といっても生活に支障がない程度には書けてね.
- ξ という文字は書けますが，読めませんでした（クサイ). **山田のコメント：** 覚えてね.
- （ギリシャ語一覧）（原文ママ：ギリシア文字のことか）（自分も含め覚えていない人のために）
  （小文字）α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ι, κ, λ, μ, ν, ξ, o, π, ρ, σ, τ, υ, ϕ, χ, ψ, ω
  （大文字）A, B, $\mathit{\Gamma}$, $\mathit{\Delta}$, E, Z, E （原文ママ：H のことか）, $\mathit{\Theta}$, I, K, $\mathit{\Lambda}$, M, N, Ξ, O, Π, P, Σ, T, Υ, $\mathit{\Phi}$, X, Ψ, $\mathit{\Omega}$
  山田のコメント： 読み方も覚えてくださいね.
- テストがんばります. **山田のコメント：** どうぞ.
- 特にありません. **山田のコメント：** そうですか.

質問と回答

質問 1： 空間曲線の基本定理について，曲率 κ が正の実数しか値をとらないという仮定がどこできいてくるのかがわかりませんでした．κ が 0 になる点が損座いすると仮定しても Ω は交代行列なので，教科書の式 (2.16) を参考にすれば $\mathcal{F}$ が行列式 1 の直交行列であることが言えると思います．したがって Frenet Frame が定まり，主法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ なども定まると考えました．一方で授業では $\kappa = 0$ となる点は $\boldsymbol{n}$ の向きが一意に定められないから $\kappa > 0$ で考えるという話だったと思います．このギャップはなんでしょう？

お答え： κ, τ が与えれれば，κ が零点をもったとしても Frenet-Serret の方程式は解けて，SO(3) に値をもつフレームがとれます．$\kappa < 0$ の点ではこのフレームの第 2 列は $-\boldsymbol{n}$, 第 3 列は $-\boldsymbol{b}$ になります.

質問 2： $\gamma'' = 0$ の場所を特別扱いして，$\gamma'' \neq \boldsymbol{0}$ でない個々の区間に空間曲線の基本定理を適用し，うまい κ の定義を与えることで空間曲線の基本定理の $\kappa(s) > 0$ の条件を外したものを証明することはできるのでしょうか．$\gamma''(s) = 0$ で $\gamma^{(3)}(s)$ が消えていないときはそこで κ の符号が変わるようにすればよい（$\kappa(s) = 0$, $\kappa'(s) \neq 0$ の場合に対応？）と思いました． **お答え：**おっしゃるとおりで適切にフレームを設定し，適切に曲率を設定すれば基本定理は作れます．ただし $\gamma^{(n)}(s) \neq \boldsymbol{0}$ となる n の存在は必要だと思います.

質問 3： 一般に $B \in \mathrm{O}(3)$ なら $(B\boldsymbol{\alpha}) \times (B\boldsymbol{\beta}) = (\det B)B(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta})$, $B \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ なら $(B\boldsymbol{\alpha}) \times (B\boldsymbol{\beta}) = (\det B)^t B^{-1}(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta})$ なことに気づけたので面白かったです．先生はこの性質を元に問題を作られたのですか？

お答え： そういうわけではないです．ご指摘の公式は，簡単に示せますがあまり公式として出てきませんね.

質問 4： $\frac{d\mathcal{F}}{ds} = \mathcal{F}\Omega$ で Ω が交代行列 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F} \in \mathrm{SO}(3)$（原文ママ：初期条件 $\mathcal{F}(s_0) \in \mathrm{SO}(3)$ が必要です）であることを問題 4-2 (1) で示しましたが，フルネセレの公式に出てくる Ω は一番左下と右上の成分が 0 になっていてよりきびしい交代行列が出てきています．このことは，フルネ枠を SO(3) に属すること以外に何かを特徴づけているのでしょうか.

お答え： 第 2 列が $\boldsymbol{e}$ の微分（加速度ベクトル）と平行であるということがこの形を決めています．すなわち，第 2 列まででなら γ の 2 階微分までで決まる．第 3 列は 3 階微分が必要ですね.

質問 5： 問題 6-1 の結果において，$x(s) = o(s^0)$, $y(s) = o(s^1)$, $z(s) = o(s^2)$ となり z 成分が x 成分，y 成分よりも 0 に近いのはなぜですか？ **お答え：**そのように座標軸をとったから．実際 $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{n}$ がそれぞれ γ の 1 階微分，2 階微分から定まっていることと関連してるように見えませんか？

質問 6： 問題 6-2 で $\tilde{\gamma}$ の曲率が $-\kappa$, 捩率が τ のときどうなるのかきになったのですが，曲率の定義が $\kappa > 0$ なのでどうすればよいのか分からなくなりました． **お答え：**この場合 $-\kappa$ は「曲率ではない（曲率の情報を持っている）何か」，$\boldsymbol{n}$ は「主法線でない何か」ですが，方程式自体は意味を持っていますね.

質問 7： 5-1 の常螺旋を特別な方向から見ると図のようになり，$t=0$ が尖点に対応するから 5-1 の $\kappa_2(0)$ は無限大になってしまうということですか． **お答え：**そうです．

質問 8： 前回の質問 1 をした者です．以下のように途中まで考えることができました：空間曲線の基本定理において κ, τ がともに正であるとする．κ を曲率，τ を捩率とする曲線を γ, τ を曲率 $|kappa$ を捩率とする曲線を $\tilde{\gamma}$ としてそれぞれの Frenet 枠を $\mathcal{F}=(\boldsymbol{e},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b})$, $\tilde{\mathcal{F}}=(\tilde{\boldsymbol{e}},\tilde{\boldsymbol{n}},\tilde{\boldsymbol{b}})$ とする． $\Omega=\begin{pmatrix}0 & -\kappa & 0\\ \kappa & 0 & -\tau\\ 0 & \tau & 0\end{pmatrix}$, $\Omega'=\begin{pmatrix}0 & -\tau & 0\\ \tau & 0 & -\kappa\\ 0 & \kappa & 0\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$. とするとき，$\frac{d}{ds}(\tilde{\mathcal{F}}P\tilde{\mathcal{F}}^{-1})=O$ から，ある $A\in \mathrm{O}(3)$ で $\tilde{\mathcal{F}}P=A\mathcal{F}$ から $(-\tilde{\boldsymbol{b}},\tilde{\boldsymbol{n}},-\tilde{\boldsymbol{e}})=(\boldsymbol{e},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b})$ となる．よって $\tilde{\boldsymbol{e}}=-A\boldsymbol{b}$, $\tilde{\boldsymbol{n}}=A\boldsymbol{n}$, $\tilde{\boldsymbol{b}}=-A\boldsymbol{e}$ となる．このあとがよく分かりませんでした．ここまでの間違いか，これ以降のヒントがあれば教えて頂きたいです． **お答え：**とくに合同変換で A を単位行列にできる．したがって $\tilde{\boldsymbol{e}}=-\boldsymbol{b}$．すなわち「元の曲線の従法線ベクトルを速度ベクトル（の逆向き）にもつ曲線」．

質問 9： 今回のプリントの質問 1 や問題 2 のように，κ や τ が交換したり符号が変わっただけのものは，Ω に適当な直交行列 P によって $\tilde{\Omega}={}^tP\Omega P$ の変換と微分方程式の利用で階となる曲線を考察することができそうだと思いました．他にも Ω のある変換 $\tilde{\Omega}$ が定まって $\frac{d}{ds}\tilde{\mathcal{F}}=\tilde{\mathcal{F}}\tilde{\Omega}$ となるもの中で元の $\frac{d}{ds}\mathcal{F}=\mathcal{F}\Omega$ を利用して考察するものはあるでしょうか． **お答え：**考えるだけなら P に何をとってもよいですね．いろいろと試してみましょう．

質問 10： 考察する対称（原文ママ：対象）がリー群であるとどのような嬉しさがあるのでしょうか．

お答え： 微積分が使える．

質問 11： 5-1 の解答について，$\kappa_1(0)=\kappa(0)$, $\kappa_2(0)=\infty$，$\kappa_3(0)=0$ と書かれていました．ここで曲率が 0 ということは，$\det|\gamma',\gamma''|=0$ （原文ママ：縦線か det かどちらかが不要では？）ということですか？ $\gamma'={}^t(a_1,a_2)$, $\gamma''={}^t(b_1,b_2)$ とすると，$\gamma'\perp\gamma''$ より $a_1b_1+a_2b_2=0$ (1)，$\det|\gamma',\gamma''|=0$ とすると $a_1b_2-a_2b_1=0$ (2). (1)，(2) より $(b_1,b_2)=(0,0)$，$(a_1,a_2)=(0,0)$ となる．つまり γ' または γ'' が $\mathbf{0}$ ということで，単位接ベクトルまたは単位法線ベクトルが $\mathbf{0}$ ということでしょうか？また，曲率が ∞ というのは $|\gamma'|=0$ ということであり $\gamma'=\mathbf{0}$ ということですか． **お答え：**前半：弧長パラメータなら $\gamma'\perp\gamma''$ が成り立つ．一方 γ' は単位ベクトルなので零ベクトルにはなりえない．したがって曲率が零であるための必要十分条件は $\gamma''=\mathbf{0}$．一般のパラメータでは，曲率が零となるための必要十分条件は $\dot{\gamma}/\!/\ddot{\gamma}$．単位法線ベクトルは単位ベクトルなので決して零でない．後半：一般のパラメータで $\dot{\gamma}=\mathbf{0}$，かつ $\det(\dot{\gamma},\ddot{\gamma})\neq 0$ なら「無限大」とみなせますね．

質問 12： $x+y=c$ という形の直線が傾きを，$x^2+y^2=c$ という形の円が曲率を一定に保つ性質を持っているように，$x^n+y^n=c$ も n 次に関する量を一定に保っているのではないかと疑問をもった．

お答え： 円 $C: x^2+y^2=c$ 上の任意の点 P を C 上の点 Q に移す合同変換で，C を不変に保つものが存在する．ゆえに，C 上の各点は「同等の性質」をもつ．それでは，曲線 $x^n+y^n=c$ 上で同じようなことがいえるだろうか．

質問 13： 講義資料 6 の質問 9 について，「x と y が比例する」を「$\exists k\neq 0$ s. t. $y=kx$」とする定義が提案されていましたが，この定義について「x と y に関して対称でない」とするのは誤りだと思います．（$\because$ $\exists k\neq 0$ s. t. $y=kx$ $\Rightarrow$ $\exists l=\frac{1}{k}$, $x=ly$）それとは別にこの講義で「$ax+by$ が恒等的に零...」を比例の定義として採用するのには賛成します． **お答え：**おっしゃるとおり $k\neq 0$ とあれば対称ですね．後者の定義は (x,y) が xy 平面上の原点を通る直線上にのっている，ということですが，これが自然だと（山田は）思っています．

質問 14： $\boldsymbol{e}$ と $\boldsymbol{n}$ が張る平面を接触平面というわけですが，$\boldsymbol{e}$ と $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{b}$ が張る平面にはよく知られている名前はありますか． **お答え：**展直平面 the rectifying plane, 法平面 the normal plane とよばれます．

質問 15： 捩率に $-$ をつけるのは常螺線の捩率が正になるようにするためという解説が何度かありましたが，これは常螺線が空間曲線の中でも基本的なものであるという共通認識が $-$ をつける派の人々にあるからですか．

お答え： そうかも知れませんが，どうなんでしょうね．ちなみに曲率と捩率がともに定数である曲線は円か常螺線に限りますので，基本的な曲線であることは確かです．

質問 16： いままで何度か講義中や講義資料で $\tau(s):=-\boldsymbol{b}(s)\cdot\boldsymbol{n}(s)$（原文ママ：とこかに微分を忘れていますね）の "$-$" を付けない流儀の方もいるというお話がありましたが，$\tau(s):=\boldsymbol{b}(s)\cdot\boldsymbol{n}(s)$，$\boldsymbol{b}(s)=\boldsymbol{n}(s)\times\boldsymbol{e}(s)$ としているような習慣をもつ方もいたりするのでしょうか？

お答え： $(\boldsymbol{e},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b})$ を枠と思ったときご提案の定義では，負の向きの正規直交系ができるので，こういう習慣はないと思います．ちなみに $\boldsymbol{b}(s)\cdot\boldsymbol{n}(s)$ は零ですね．

質問 17： $A\in \mathrm{SO}(n)$ の標準形の話をしてましたが，1 変数多項式の性質から，虚数解を 1 つもつとその複素共役も解になることから，1 つの複素数の固有値はその複素共役も固有値になることと，$A\in\mathrm{SO}(n)$ の固有値が 1 になることを利用して，2 次元ずつの回転にわけられることですよね!!（早口）

お答え： そうです．正確には「実係数 1 変数多項式」ですね．

質問 18： （過去の講義内容より）「$\tan\frac{\theta}{2}=s$ とおくとどのようにこの部分（略）の長さが $\tan\frac{\theta}{2}$ となったのですか．いろいろと試行錯誤したのですが，導出できませんでした．

お答え： 図（ここには省略しています）の場所が違います．xy 平面上の単位円上の点 $(-1,0)$ と点 $(\cos\theta,\sin\theta)$ を結ぶ直線と y 軸との交点の y 座標が $\tan\frac{\theta}{2}$．これは円周角の公式と正接の定義からすぐにでるはず．

質問 19： （空間曲線の基本定理）$\kappa(s)$ と $\tau(s)$ から曲線が合同変換を除いて 1 つに定まるとありますが，$\tau(s)$ は $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{n}$ から，そして $\boldsymbol{n}$ は κ から定まっているので「$\kappa(s)$ から定まる」と考えることはできますか．$\kappa(s)$ は定まるが $\tau(s)$ は定まらないということもありますか． **お答え：**$\boldsymbol{n}$ は κ から定まるのでしょうか．与えられた関数 $\kappa(s)$ から $\boldsymbol{n}$ が再現できるでしょうか．後半：$\kappa(s)>0$ ならフルネ枠が作れるので自動的に τ が定まります．

質問 20： 定傾曲線についてですが，曲率が 0，あるいは捩率が 0 の空間曲線も，どちらも $\gamma'(s)$ に対する単位法線ベクトルを設定することができる以上この定傾曲線に含まれるということでしょうか．

お答え： 定ベクトルと定角をなす曲線を定傾曲線とよぶならそうです．ただし曲率が恒等的に 0 の曲線は，定ベクトルの一意性がありません．ちなみに定傾曲線でなくても「$\gamma'(s)$ に対する単位法線ベクトル」は存在します．

質問 21： 節末問題 1（山田注：教科書 §5 のことか）についてです．一般の合同変換で曲率は変わらないとありますが，「向きがかわる」ことが曲率の符号に影響しないのはなぜなのでしょうか？ **お答え：**曲率の定義は $|\gamma''|$.

質問 22： 6-2 で “曲率を κ，捩率を $-\tau$ にする $\tilde{\gamma}$ をとると，$\tilde{\gamma}$ と γ は向きを反転する等長変換で移り合いましたが，一般に等長変換ならば曲率も捩率に関しても符号程度の際しか生じないのではないでしょうか．

お答え： はいそのとおりです．示してごらんなさい．

質問 23： 特異点と曲率の話について，特異点 $\Rightarrow$ 曲率は 0 または $\pm\infty$ ということは言えますか？

お答え： 言えません．$\gamma(t)=(\cos t^3,\sin t^3)$ とすると，γ は $t=0$ に特異点をもつが，$t\neq 0$ で正則で曲率は 1.

質問 24： 「線形」という漢字と「線型」という漢字を使いわけていましたが，どのような違いをもつのでしょうか．

お答え： 現代では同じ意味.

質問 25： $F(x,y,z)=0$ と表される曲面があったとして，これで $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$ となるような u, v を探すことがあると思うのですが，このような u と v はいかなる場合でもとれるのでしょうか．

お答え： $dF\neq\mathbf{0}$ ならばいつでも取れる．第４四半学期の最初の方でやります．

質問 26： 前回の 5-1 (2) で $\kappa_2(t)$ のところにチェックがはいっていたのであってると思ったんですが，0 をいれるとどう見ても発散しませんでした．結局これは間違いなんですか．

お答え： 間違いでした．申し訳ありません．答案をチェックしているのは大変よいと思います．

質問 27： 空間曲線で $\theta(t)=\int_0^t\kappa(u)\,du$，$\gamma(s)=$ (略：平面曲線の基本定理に対応する式) として $\gamma(s)$ を与えられたように，曲率（と捩率？）から $\gamma(s)$ を与える式を作ることはできるのでしょうか．

お答え： 具体的に「積分して」という意味では「できない」ということを講義で述べた（きちんと説明はしていないが)．一方，曲率と捩率で空間曲線は決まる（空間曲線の基本定理）ので，ご質問の「曲率（と捩率？）」は「曲率と捩率」と明確に書くべきだと思います（知識があやふや).

質問 28： 5-2 で曲率と捩率が比例すると，講議（原文ママ：何度か違うって言っているのに）の最後で言っていたことから，微分方程式がとけるということですか？ **お答え：**そう.

質問 29： 実生活でどう役に立っているか教えてください． **お答え：**何が？この科目の内容が，でしょうか．あなたの実生活がどのようなものか分かりませんので回答不能です．講師の実生活では「飯の種」なので役にたっています.

質問 30： 英語アルファベット，ギリシャ文字以外に書けるようにしておいた方が良い文字を教えてください.

お答え： 漢字．漢字が間違っていると文書の信憑性が疑われる．ヘブライ文字は？

質問 31： 今までレポート問題についてはなんとか自力で解けてきましたが，期末テストは同じようなレベルの問題が出ますか？もっとレベルの高い問題が出ますか？

お答え： レベルの意味がよくわからないので回答できません．講師の性格からして易しい問題がでると思います.

質問 32： 曲率関数の曲率関数を考えることはありますか． **お答え：**「関数の曲率」ってなんでしょう.

質問 33： 期末試験の予想問題や過去問題はありますか． **お答え：**さあ，どうでしょう.