山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 定期試験 〔問題 1〕

注意事項

- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読みとり, 理解できるように書いてください.
- 計算や下書きには余白や裏面を使用してください（採点の対象とはしません）.
- 試験終了後は，**解答用紙**と**持込用紙**を回収します．問題は持ち帰っていただいて結構です.
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません．問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し, 正しいと思われる問題に直して解答してください.
- 答案は **11 月 29 日**午後から，**数学事務室（本館 3 階 332B）**にて返却いたします.
- 採点に関する質問・クレイムなどは **2019 年 12 月 13 日**までに山田まで**電子メイル**にてお申し出ください．上記期日以降のクレイムは，**たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません**．ご了承下さい．また，返却答案を受け取らない方はクレイムをつける権利がありません.

指定用紙のみ持込可

問題 A 次の文中の $\boxed{1}$ ~ $\boxed{2}$ に最もよく充てはまる数・式・言葉を入れ，下線 **a–b** をつけた部分の理由を述べなさい． [20 点]

数直線上の 0 を含む区間 J で定義された C^∞-級関数

$$\varphi\colon J \ni s \longmapsto \varphi(s) \in \mathbb{R}$$

に対して，

$$\theta(s) := \int_0^s \varphi(u)\,du, \qquad \gamma(s) := \left(\int_0^s \cos\theta(u)\,du, \int_0^s \sin\theta(u)\,du\right)$$

により，関数 $\theta\colon J \to \mathbb{R}$ と写像 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^2$ を定める．すると $|\gamma'(s)| = 1$（$' = d/ds$）であるから，γ は s を弧長パラメータとする平面曲線を与えている．とくに γ の曲率は $_{\mathbf{a}}\underline{\kappa(s) = \boxed{1}}$ と表される.

いま $\varphi(s) := \cos^2 s$ $(s \in \mathbb{R})$ とすると，$\varphi(s)$ は周期 π をもつ．このとき，$_{\mathbf{b}}$<u>曲線 γ は周期 π を $\boxed{2}$</u>*.

問題 B 次の文中の $\boxed{3}$ ~ $\boxed{4}$ に最もよく充てはまる数・式・言葉を入れ，下線 **c–d** をつけた部分の理由を述べなさい． [20 点]

平面曲線 $\gamma(t) = (\operatorname{sech} t, t - \tanh t)$ は $t = \boxed{3}$† に特異点をもつ．パラメータ t が特異点に近づくとき，γ の $_{\mathbf{c}}$<u>曲率 $\kappa(t)$ の絶対値は無限大に発散する</u>.

一般に，パラメータ表示された平面曲線 $\sigma(t)$ が $t = t_0$ に特異点をもつとする．パラメータ t が t_0 に近づくとき，$_{\mathbf{d}}$<u>σ の曲率の絶対値は無限大に発散 $\boxed{4}$</u>‡.

裏面に続く

* $\boxed{2}$ には「もつ」「もたない」のいずれかが入る.
† $\boxed{3}$ には条件をみたす全ての t の値を入れる.
‡ $\boxed{4}$ には「する」,「するとは限らない」のいずれかが入る.

問題 C 次の文中の $\boxed{\ 5\ }$〜$\boxed{\ 27\ }$ に最もよく充てはまる数・式を入れなさい． [50 点]

パラメータ表示された空間曲線

$$\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tan t, \sec t, \log(\tan t + \sec t)) \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$$

の速度ベクトル $\dot\gamma(t)$（$\dot{} = d/dt$）は $|\dot\gamma(t)| = \boxed{\ 5\ }$ を満たすので，$s = s(t) = \boxed{\ 6\ }$ とすると，パラメータ変換 $t \mapsto s$ によって，γ の弧長パラメータ表示

$$\tilde\gamma(s) = \left(\boxed{\ 7\ }, \boxed{\ 8\ }, \boxed{\ 9\ }\right), \qquad \left(\boxed{\ 10\ } < s < \boxed{\ 11\ }\right)$$

が得られる．とくに $\tilde\gamma(s)$ の単位接ベクトルは $\boldsymbol{e}(s) = \tilde\gamma'(s) = \left(\boxed{\ 12\ }, \boxed{\ 13\ }, \boxed{\ 14\ }\right)$ で与えられ，単位主法線ベクトル $\boldsymbol{n}(s)$，単位従法線ベクトル $\boldsymbol{b}(s)$，曲率 $\kappa(s)$，捩率 $\tau(s)$ はそれぞれ

$$\boldsymbol{n}(s) = \left(\boxed{\ 15\ }, \boxed{\ 16\ }, \boxed{\ 17\ }\right), \quad \boldsymbol{b}(s) = \left(\boxed{\ 18\ }, \boxed{\ 19\ }, \boxed{\ 20\ }\right), \quad \kappa(s) = \boxed{\ 21\ }, \quad \tau(s) = \boxed{\ 22\ }$$

で与えられる．

ここで，C^∞-級関数 $\alpha(s)$, $\beta(s)$ を用いて

$$\boldsymbol{v}(s) := \boldsymbol{e}(s) + \alpha(s)\boldsymbol{n}(s) + \beta(s)\boldsymbol{b}(s)$$

とおくと，

$$\frac{d}{ds}\boldsymbol{v}(s) = \boxed{\ 23\ }\boldsymbol{e}(s) + \boxed{\ 24\ }\boldsymbol{n}(s) + \boxed{\ 25\ }\boldsymbol{b}(s)$$

と書けるので，$\boldsymbol{v}(s)$ が s によらない定数となるためには，$\alpha(s) = \boxed{\ 26\ }$，$\beta(s) = \boxed{\ 27\ }$ でなければならない．

問題 D 次の文中の下線 e をつけた部分の理由を述べなさい． [10 点]

定理（空間曲線の基本定理）： 数直線上の区間 J で定義された C^∞-級関数 κ, τ が与えられ，とくに J 上で $\kappa > 0$ とする．このとき，弧長によりパラメータ付けられた空間曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^3$ でその曲率が κ，捩率が τ であるものが存在する．
さらに，そのような曲線は$_{\mathbf{e}}$<u>変換 $\gamma \mapsto A\gamma + \boldsymbol{a}$ ($A \in \mathrm{SO}(3)$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$) を除いて一意である</u>．

問題 E [0 点] この科目の講義，教材，試験などに関する意見，希望，誹謗，中傷などをお書きください．何を書いても怒りません．

おつかれさまでした ♡

幾何学概論第一 定期試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄

1

$\varphi(s)$

$\theta'(s)$ は正解；$|\theta'(s)|$ は不正解．平面曲線の曲率は負の値も取りうる

下線 a の理由

$\gamma'(s) = \bigl(\cos\theta(s), \sin\theta(s)\bigr)$,
$\gamma''(s) = \theta'(s)\bigl(-\sin\theta(s), \cos\theta(s)\bigr) = \varphi(s)\bigl(-\sin\theta(s), \cos\theta(s)\bigr)$.
したがって，

$$\kappa(s) = \det(\gamma'(s), \gamma''(s)) = \varphi(s)\begin{vmatrix}\cos\theta(s) & -\sin\theta(s) \\ \sin\theta(s) & \cos\theta(s)\end{vmatrix} = \varphi(s).$$

2

もたない

「θ が周期 π を持たないので γ は周期をもたない」 は正しくない．
周期関数でない θ に対して $\cos\theta(s)$ や $\int\cos\theta(s)\,ds$ が周期関数になることはある．

下線 b の理由

もしも γ が周期 π をもつならば，γ は長さ π の閉曲線とみなせる．すると，全曲率は π の整数倍となるはずだが，

$$\int_0^\pi \kappa(s)\,ds = \int_0^\pi \cos^2 s\,ds = \frac{\pi}{2}$$

である．

各 5 点．ただし 1 が不正解なら **a** は自動的に不正解．2 が不正解なら **b** は自動的に不正解．

学籍番号									氏名	

幾何学概論第一 定期試験 〔解答用紙 2〕

問題 B の解答欄

3

0

下線 c の理由

$\dot\gamma(t) = \tanh t(-\operatorname{sech} t, \tanh t)$ （$\dot{} = d/dt$）なので，$|\dot\gamma(t)| = |\tanh t|$ となり，$t=0$ にのみ特異点をもつ．さらに

$$\ddot\gamma(t) = \operatorname{sech}^2 t(-\operatorname{sech} t, \tanh t) + \tanh t \operatorname{sech} t(\tanh t, \operatorname{sech} t)$$

が，右辺第 1 項は $\dot\gamma(t)$ と一次従属だから，

$$\kappa(t) = \frac{\det(\dot\gamma, \ddot\gamma)}{|\dot\gamma|^3} = \frac{\tanh^2 t \operatorname{sech} t}{|\tanh t|^3}\left(\begin{vmatrix} -\operatorname{sech} t & \tanh t \\ \tanh t & \operatorname{sech} t\end{vmatrix}\right) = -|\operatorname{sech} t \coth t|.$$

ゆえに $\displaystyle\lim_{t\to 0}|\kappa(t)| = \lim_{t\to 0}|\operatorname{sech} t \coth t| = +\infty$.

4

するとは
限らない

下線 d の理由

$\gamma(t) := (t^2, t^5)$ とすると，$\dot\gamma(t) = t(2, 5t^3)$ なので γ は $t=0$ に特異点をもつ．このとき，

$$\kappa(t) = \frac{30t}{\sqrt{4+25t^6}^3} \to 0 \qquad (t\to 0).$$

これは陰関数表示の話ではない
「有界になりうる」という宣言だけでは理由にならない

各 5 点．ただし 3 が不正解なら **c** は自動的に不正解．4 が不正解なら **d** は自動的に不正解．

学籍番号								氏名	

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 定期試験 〔解答用紙 3〕

問題 C の解答欄

5 $\sec^2 t$	6 $\tan t$	7 $\frac{s}{\sqrt{2}}$	8 $\frac{\sqrt{1+s^2}}{\sqrt{2}}$	9 $\frac{\log(s+\sqrt{1+s^2})}{\sqrt{2}}$	
10 $-\infty$	11 ∞	12 $\frac{1}{\sqrt{2}}$	13 $\frac{s}{\sqrt{2(1+s^2)}}$	14 $\frac{1}{\sqrt{2(1+s^2)}}$	
15 0	16 $\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$	17 $\frac{-s}{\sqrt{1+s^2}}$	18 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$	19 $\frac{s}{\sqrt{2(1+s^2)}}$	20 $\frac{1}{\sqrt{2(1+s^2)}}$
21 $\frac{1}{\sqrt{2}(1+s^2)}$	22 $\frac{-1}{\sqrt{2}(1+s^2)}$				
23 $-\kappa(s)\alpha(s)$	24 $\kappa(s)+\alpha'(s)-\tau(s)\beta(s)$	25 $\beta'(s)+\alpha(s)\tau(s)$			
26 0	27 -1				

5–6, 7–9, 10–11, 12–14, 15–17, 18–20, 21, 22, 23–25, 26–27：各 5 点

学籍番号								氏名	

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 定期試験 〔解答用紙 4〕

問題 D の解答欄 10 点

下線 e の理由

弧長 s によりパラメータづけられた曲線 $\gamma(s)$, $\tilde\gamma(s)$ の曲率・捩率が共にそれぞれ $\kappa(s)$・$\tau(s)$ とする．γ と $\tilde\gamma$ のフルネ枠をそれぞれ $\mathcal{F}, \tilde{\mathcal{F}}$ とすると，フルネ・セレの公式より

$$\frac{d\mathcal{F}}{ds}(s) = \mathcal{F}(s)\Omega(s), \qquad \frac{d\tilde{\mathcal{F}}}{ds}(s) = \tilde{\mathcal{F}}(s)\Omega(s), \qquad \Omega(s) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．このことから

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\left(\tilde{\mathcal{F}}(s)\,{}^t\mathcal{F}(s)\right) &= \frac{d\tilde{\mathcal{F}}}{ds}(s)\,{}^t\mathcal{F}(s) + \tilde{\mathcal{F}}(s)\frac{d}{ds}\left({}^t\mathcal{F}(s)\right) \\
&= \frac{d\tilde{\mathcal{F}}}{ds}(s)\,{}^t\mathcal{F}(s) + \tilde{\mathcal{F}}(s)\,{}^t\!\left(\frac{d\mathcal{F}(s)}{ds}\right) \\
&= \tilde{\mathcal{F}}(s)\Omega(s)\,{}^t\mathcal{F}(s) + \tilde{\mathcal{F}}(s)\,{}^t(\mathcal{F}(s)\Omega(s)) \\
&= \tilde{\mathcal{F}}(s)\Omega(s)\,{}^t\mathcal{F}(s) + \tilde{\mathcal{F}}(s)\,{}^t\Omega(s)\,{}^t\mathcal{F}(s) \\
&= \tilde{\mathcal{F}}(s)\left(\Omega(s) + {}^t\Omega(s)\right){}^t\mathcal{F}(s) = O.
\end{aligned}$$

なので $\tilde{\mathcal{F}}\,{}^t\mathcal{F}$ は s によらない定行列となる．この行列を A とおく．とくに $\mathcal{F}(s), \tilde{\mathcal{F}}(s)$ は $\mathrm{SO}(3)$ に値をとるので ${}^t\mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1}$，$A \in \mathrm{SO}(3)$ が成り立っている．したがって $\tilde{\mathcal{F}}(s) = A\mathcal{F}(s)$（$A \in \mathrm{SO}(3)$）を得る．
いま，フルネ枠を列ベクトルに分解して $\mathcal{F}(s) = (\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s))$，$\tilde{\mathcal{F}}(s) = (\tilde{\boldsymbol{e}}(s), \tilde{\boldsymbol{n}}(s), \tilde{\boldsymbol{b}}(s))$ と書くと，

$$\frac{d\tilde\gamma}{ds}(s) = \tilde{\boldsymbol{e}}(s) = A\boldsymbol{e}(s) = A\frac{d\gamma}{ds}(s) = \frac{d}{ds}(A\gamma(s))$$

なので，$\tilde\gamma(s) = A\gamma(s) + \boldsymbol{a}$ なる定ベクトル $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ が存在する．

学籍番号									氏名	

幾何学概論第一 定期試験 〔解答用紙 5〕

問題 E [0 点] この科目の講義，教材，試験などに関する意見，希望，誹謗，中傷などをお書きください．何を書いても怒りません．

回答欄

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面に座席表があります．ご自分の学籍番号の座席に着席してください．

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します．

- 受験者が着席していること．
- 各受験者が，筆記用具・持ち込み用紙・必需品（ハンカチ・ティシューペーパーなど；電話などは不可）以外の持ち物を鞄に入れ，机の下か足元に置いていること．
- 私語がないこと．

問題用紙・解答用紙： 問題用紙は 1 枚両面，解答用紙は 5 枚（この紙を含む）です．

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください．
- **解答用紙 5 枚 (この紙を含む) と持ち込み用紙はすべて提出**してください．持ち込み用紙を持参しなかった方は提出しなくて結構ですが，解答用紙が **5 枚揃っていない答案は採点いたしません**．
- 解答は所定のスペースに記入してください．欄外や裏面は採点の対象にしません．
- 問題用紙は提出せず，お持ち帰りください．

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいてください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙 1, 解答用紙 2，解答用紙 3，解答用紙 4，解答用紙 5，持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を教室の黒板に向かって最右端の壁際から左，最左端の壁際まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最左端の席の方は，答案用紙の束を机の上おき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です．

学籍番号									氏名	