2019 年 12 月 5 日 (2019 年 12 月 12 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二（MTH.B212）講義資料 1

講義概要

■重要なポインタ

- http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2019/geom-2/ (この授業の公式ページ)
- http://www.official.kotaroy.com/class/2019/geom-2/ (この授業のページ; ミラーサイト)
- http://www.ocw.titech.ac.jp/ (東工大 OCW)
- 本館 2 階 231 (山田の部屋；提出物ポストはここ)
- 本館 3 階 332B (数学事務室；答案返却など)

■科目名など　幾何学概論第二 (MTH.B212) （第４四半学期・木曜日・3/4 時限・理学院数学系）

■担当者　山田光太郎（理学院数学系）kotaro@math.titech.ac.jp

■講義の概要　幾何学概論第一 (MTH.B211) に続き，主に以下の事項を学ぶ：正則曲面のパラメータ表示，第一基本形式・長さ・角度・面積, 第二基本形式・主曲率・ガウス曲率・平均曲率・測地線，ガウス-ボンネの定理，曲面論の基本定理の意味. 古典的な，ユークリッド空間の曲面の微分幾何学の基本事項を身につけるとともに，現代の微分幾何学を学ぶための準備を行う.

■到達目標　3 次元ユークリッド空間内の曲面の微分幾何学の基本的な事項，とくに曲面の曲率の概念と，その幾何学的な性質を学ぶ.

- 曲面のパラメータ表示とパラメータ変換，パラメータによらない量の概念を知る.
- 曲面の曲率と曲面の形状の関係を知る.
- 曲面の大域的性質と局所的性質の具体例を知る.
- 理論の具体例を計算によって確認する.

■教科書　梅原雅顕・山田光太郎『曲線と曲面』改訂版（裳華房）
正誤表：http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/publication/surface-jp.html

■成績評価の方法

- **授業日程**の項にある定期試験を**受験**することが単位を得るための必要条件です．(十分条件ではありません)．やむを得ない理由で試験を受けられない方は（可能な限り）事前に電子メイルにて講義担当者までご連絡ください．連絡なしに試験に欠席した方は，原則として単位を得る権利を失います.
- 成績は**主として定期試験**の得点で決めます．定期試験の成績が余りよくない場合（とくに定期試験だけでは不合格になってしまう場合）に以下の「提出物」の成績を考慮します.
- 授業後に (1) 講義資料にあげた**問題**のうち一つの解答 (2 点); (2) **前回までの授業内容に対する質問**あるいは**講義・講義資料の誤りの指摘** (3 点) を提出してください．これを 1 回 5 点満点で評価します.
  提出方法　所定の用紙に記入し，授業の翌日 **金曜日の 17 時 00 分**までに山田の部屋（本館 2 階 231）

の前のポストに提出してください．所定の用紙と異なる形式のものは受け付けません．

キーワード　毎回，講義のあとに，OCW に登録したメイルアドレス（既定値は m アドレス）に**キーワード**を送信します．提出用紙の該当欄にキーワードを記入してください．

注意　いただいた質問にはできる限り回答します．なお，質問および回答の内容は**公開します**のでご了承下さい．とくに質問の文章はできる限り原文を尊重しますので，誤字に気をつけてください．

おまけ　提出用紙には授業に関する感想，意見の記入欄を設けます．いただいた御意見は個人が特定できない形で公開いたします．なお，ご意見等の内容は成績に一切影響いたしません．

- いわゆる出席点はつけません．したがって出席もとりません．しかし，出席と関わりなく **授業時間中に連絡したことは伝わっている** とみなします．
- 試験後，答案を返却し，成績を確認していただきます．採点，成績に関する**クレイム・質問は期間を限って受付け**ます．なお，成績に関する議論は，提出されたものに**書かれたもののみを材料**とします．

■授業日程

		授業内容
12 月 05 日	1	準備
12 月 12 日	2	曲面のパラメータ表示；面積・長さと第一基本量 (§§6/7)
12 月 19 日	3	第一基本形式・第二基本形式 (§§7/8)
12 月 26 日	4	主曲率・ガウス曲率・平均曲率 (§8)
01 月 09 日	5	主方向・漸近方向 (§9)，曲面論の基本定理
01 月 16 日	6	測地線 (§10)
01 月 23 日	7	ガウス・ボンネの定理 (§§10/11)
01 月 30 日	試	**定期試験**

1 準備（目標）

1.1 曲面論の基本定理

- クリストッフェル記号 Γ_{ij}^k; テキスト 108 ページ，(10.6).
- ガウス・コダッチの方程式; テキスト §16 (179 ページ)
- ガウス曲率は内的不変量である; テキスト 111 ページ，(10.10).

定理 1.1 (曲面論の基本定理; テキスト §16 (179 ページ)). uv 平面上の単連結領域 D 上のなめらかな関数 E, F, G, L, M, N が与えられ，$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ が D 上のリーマン計量を与えているとする．これらの関数から (10.6) によって Γ_{ij}^k $(i, j, k = 1, 2)$ を定める．これらが関係式 (16.5) を満たすならば，曲面のパラメータ表示 $p\colon D \to \mathbb{R}^3$ で，その第一基本量，第二基本量がそれぞれ E, F, G; L, M, N となるようなものが存在する．さらにそれは $\mathbb{R}^3$ の向きを保つ合同変換を除いて一意である．

1.2 ガウス・ボンネの定理

定理 1.2 (ガウス・ボンネの定理; テキスト 110 ページ，定理 10.6). 曲面上の測地三角形 △ABC の内角をそれぞれ ∠A，∠B，∠C とすると，次がなりたつ：

$$\angle\mathrm{A} + \angle\mathrm{B} + \angle\mathrm{C} = \pi + \iint_{\triangle\mathrm{ABC}} K\,dA.$$

ただし K は曲面のガウス曲率，dA は曲面の面積要素である．

定理 1.3 (閉曲面のガウス・ボンネの定理; テキスト 112 ページ，定理 10.7). 閉曲面 S のオイラー数を $\chi(S)$ と書くと，

$$\iint_S K\,dA = 2\pi\chi(S)$$

が成り立つ．ただし K は曲面のガウス曲率，dA は面積要素である．

1.3 曲面のパラメータ表示

- 陰関数表示とパラメータ表示
- 特異点，自己交叉.
- パラメータ変換.
- パラメータのとり方によらない量.

2019 年 12 月 5 日 (2019 年 12 月 12 日訂正)

問題

1-1 (1) 与えられた正の定数 R, r $(R > r)$ に対して xy-平面上の原点を中心とする半径 R の円を C_1，点 $(0, R)$ を中心とする半径 r の円を C_2，C_1 と C_2 の交点のうち第一象限にあるものを A，C_1 と y 軸の正の部分の交点を B，C_2 と y 軸との交点のうち原点に近い方を C とする．このとき，A，B，C をそれぞれ弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ と弧 $\overset{\frown}{\mathrm{CA}}$ が点 A においてなす角，弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ と線分 BC が点 B においてなす角，線分 BC と弧 $\overset{\frown}{\mathrm{CA}}$ が点 C においてなす角とする．これらの角の総和 $A + B + C$，弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の長さ，弧 $\overset{\frown}{\mathrm{CA}}$ の長さをそれぞれ求めなさい．

(2) 座標空間の原点を中心とする半径 r（> 0）の球面 S を “地球” と見なす．北極 $\mathrm{N} = (0, 0, r)$ および赤道上の 2 点 $\mathrm{A} = (r, 0, 0)$，$\mathrm{B} = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$ （$0 < \theta < \pi$）を取り，N と A を結ぶ子午線を γ_1，A と B を結ぶ赤道の弧のうち短い方を γ_2，B と N を結ぶ子午線を γ_3 とするとき，γ_1，γ_2，γ_3 で囲まれる球面上の三角形の面積，内角の和をそれぞれ求めなさい．

1-2 $\mathbb{R}^2$ の領域 D 上で定義された関数 $u(x, y)$，$v(x, y)$ に関して，関係式

$$(*) \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

を考える．

(1) $\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数 $u(x, y) = e^x \cos y$ に対して，(*) を満たす $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $v(x, y)$ を求めなさい．

(2) $\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数 $u(x, y) = x^2 - y^2$ に対して (*) を満たす $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $v(x, y)$ は存在するか．

(3) $\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数 $u(x, y) = x^2 + y^2$ に対して (*) を満たす $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $v(x, y)$ は存在するか．

(4) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 上で定義された関数 $u(x, y) = \log\sqrt{x^2 + y^2}$ に対して (*) を満たす $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 上の関数 $v(x, y)$ は存在するか．．

1-3 $\mathbb{R}^2$ の領域 D 上で定義された C^∞-級の単射 $\varphi\colon D \to \mathbb{R}^2$ に対して逆写像 $\varphi^{-1}\colon D' := \varphi(D) \to D$ が C^∞ 級であるとき，$\varphi\colon D \to D'$ は**微分同相写像** a diffeomorphism という．

(1) $\varphi(u, v) = \bigl(x(u, v), y(u, v)\bigr)$ が微分同相写像ならば，各点 (u, v) において

$$J_\varphi := \begin{pmatrix} x_u(u, v) & x_v(u, v) \\ y_u(u, v) & y_v(u, v) \end{pmatrix}$$

は正則行列であることを示しなさい（ヒント：$\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{id}$（恒等写像）と合成関数の微分公式を用いる）．

(2) $\mathbb{R}^2$ の領域 D 上で定義された C^∞-級 $\varphi\colon D \to \mathbb{R}^2$ に対して問題 (1) で与えられる行列値関数 $J_\varphi = J_\varphi(u, v)$ は，各点 $(u, v) \in D$ で正則行列となっているとする．このとき，$\varphi\colon D \to D' := \varphi(D)$ は微分同相写像といえるか．