2019 年 12 月 19 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二（MTH.B212）講義資料 3

前回までの訂正

- 講義資料 2，1 ページ，『授業に関するご意見の 3 つ目で「曲面上んでは」という衍字があります』というご指摘がありました．
- 講義資料 2，1 ページ，前回までの訂正の 3 行目：問題 1-1 の (3) ⇒ 問題 1-1 の (2)
- 講義資料 2，4 ページ，問題 2-2，A 地点の緯度，経度：北緯 31.61 度，東経 138.69 度 ⇒ 北緯 31.61 度，東経 139.69 度
- 講義資料 2，4 ページ，問題 2-2 (2)，(3):「ρ_2 とするとき」「ρ_3 とするとき」⇒「$\rho_2$km とするとき」「$\rho_3$km とするとき」

授業に関する御意見

- 黒板にふる番号の書き方が変わっていた気がしました． **山田のコメント：** ごめんなさい．
- 使わない古い板書 2 枚を残して 2 番目に新しい板書を消さないでください． **山田のコメント：** 気をつけます．
- 双曲線関数の微積を覚えきれていなかったので，逐時計算して時間がかかりました． **山田のコメント：** すぐ覚えます．
- 今回の授業によって球面上の任意の測地三角形の面積を求められるようになって良かったです． **山田のコメント：** 便利．
- 問題を解くスペースが足りないときはどうすればいいですか． **山田のコメント：** 下書きして適当にかいつまんで書く．
- ウラ面いんさつできませんでした．すみません． **山田のコメント：** はい

質問と回答

質問 1： 講義中の前回の問題 1-2 の $u = \log\sqrt{x^2+y^2}$ のときの v が大域的には求まらないことについて，(x, y) を極座標表示すれば $v = \theta + \mathrm{const}$ と書けるが「θ は $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上で一価関数でないから v は大域的には求まらない」という部分について教えてください． **お答え：**$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で定義された連続関数（講義で一価関数とわざわざ言ったが通常の意味の関数）f で $f(x, y) = \theta + $ 定数 となるものは存在しない．

質問 2： 1-2 (4) について，授業で $v = \theta + \mathrm{const}$ で $\theta = 0$ と $\theta = 2\pi$ を考えてこれは一価関数でないとなっていましたが，それぞれ $v = \mathrm{const}$, $v = 2\pi + \mathrm{const}$ となるわけではないのでしょうか．

お答え： したがって (x, y) 平面上の同じ点に 2 つの価が決まっていませんか？

質問 3： 一価関数を調べると，関数 $y = f(x)$ において 1 つの x に対して y の価がただ 1 つ定まるものとあったのですが，f が一価関数であることの必要十分条件は f が単射であるということですか． **お答え：**違います．ご質問の条件は「単射」の条件ではありません．普通の意味での「関数」を「一価関数」といいます．それは「多価関数」という（慣用的な）用語があるからです．$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ の極座標表示の「偏角 θ」は多価関数の例です．

質問 4： 前回の問題 1-2 (4) の解 v に関して $x \neq 0$ のとき $v = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ と表せて，局所的に解は存在する，というのはわかるのですが，この事と $v = \theta + \mathrm{const}$ と表したときに，一価関数でないことと $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ が単連結でないことの関係がよくわかりませんでした．単連結でないと，解が大域的に存在しない，などの論理が成り立つのですか？ **お答え：**ちょっと違っていて「単連結なら解は大域的に存在する」「単連結ならいろいろ」ということです．

質問 5： 板書にこのように書かれていた（図省略，テキスト 65 ページ，図 6.3）のですが，なぜ $p_u\Delta u$, $p_v\Delta v$ なのかがわかりません． **お答え：**偏微分の定義から $p(u + \Delta u, v) - p(u, v) \simeq p_u(u, v)\Delta u$.

質問 6： 正則曲面の条件が p_u, p_v の一次独立性にあるのは，法線ベクトルが 0 にならないようにするためですか?

お答え： 法線ベクトルの定義は曲面の接平面に直交するベクトルであって「$p_u \times p_v$」ではありません．

質問 7： 講義で曲面のパラメータ表示の例で $p(u, v) = (u + v, 0, 0)$ を出していましたが p_u, p_v が 1 次独立でないのは分かるのですが，$p(u, v)$ はパラメータ表示できているという認識でよろしいのでしょうか．講義のときよく聞き取れず分かりませんでした．すみません．

お答え：「$p(u, v)$ はパラメータ表示できている」というフレーズの意味がわからないのでご質問が認識できません．

質問 8： $p_u = (x_u, y_u, z_u)$, $p_v = (x_v, y_v, z_v)$ が lin. indep. のとき，$\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0$ で（原文ママ：と？）いえるのですか？ **お答え：**いいえ．$\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}$ 一つは消えないから，適当に座標軸を入れ替えればよい．

質問 9： 正則な曲面上の曲線はなめらかになりますか？ **お答え：**正則な曲面上になめらかでない曲線を描くことができます．たとえば平面は正則な曲面ですが，平面上のなめらかでない曲線はよくご存知でしょう．

質問 10： 一般的な球座標では $(R\cos u\sin v, R\sin u\sin v, R\cos v)$ という表示になっていますが，これは v の範囲を $0 \leqq v \leqq \pi$ としたいからでしょうか？

お答え： 先に「v の範囲を $0 \leqq v \leqq \pi$ とする」という目標があってそのために，ということではないと思います．

質問 11： $\mathbb{R}^3$ 上で原点中心，半径 1 の円周（原文ママ，球面のことか）の点を，極座標 ($r = 1$ のとき) で $(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ $(0 < \theta < \pi,\ 0 \leqq \varphi < 2\pi)$ と表すのと，今回の緯度，経度のように $(\cos u\cos v, \sin u\cos v, \sin v)$ $(-\pi < u \leqq \pi,\ -\frac{\pi}{2} \leqq v \leqq \frac{\pi}{2})$ と表すのではどっちが便利でしょうか．時と場合によりけりですか．また，$(\dots)$（注：後者の表示）は極座標表示の一種とみなせますか． **お答え：**両方とも「はい」．

質問 12： 講義中，3 次元での極座標を $(\cos u\cos v, \sin u\cos v, \sin v)$ としていましたが，$(\cos u\sin v, \sin u\sin v, \cos v)$ という形の方が良く見るように思います．この形にしたのは，緯度，経度に合わせたからですか？それとも他に何か理由があるのでしょうか． **お答え：**緯度，経度で表示した，と講義中に説明した．

質問 13： 今回の問題 2-1 の曲面は「擬球面」と呼ぶそうですが，どういった意味で球面的要素を持っているのでしょうか． **お答え：**ガウス曲率が一定．

質問 14： 質問を考えるために教科書をめくっていたら，教科書 247 ページが目に入り，問題 2-1 で出てきた曲面は擬球というガウス曲率が -1 で一定の曲面だということを知りました．球と擬球との関係はあるパラメータを負にするだけで全く違う形になるという点で円と双曲線の関係に似ていると思いました．しかし，複素数の範囲で考えると円と双曲線は同じような図形になります．何か視点を拡げて見ることで，球と擬球も同じような図形と見ることができるのでしょうか． **お答え：**球面のあるパラメータを負にすると擬球面になるんですか？

質問 15： 授業中，$\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt$ を $\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}$ にする変形は本当はよくないこととおっしゃっていましたが，こういった変形は微分形式（微分商？）等を学べば合理化できるのでしょうか．

お答え： 大体そう．平方根を開く部分はもう少し追加の議論が必要かもしれない．

質問 16： 曲線の長さのところで $\mathcal{L}(\hat{\gamma}) = \int\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt$ を約分のようにして $\mathcal{L}(\hat{\gamma}) = \int\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}$ となるというお話がありましたが，dt が消えてしまったのでこれが何をする積分なのかわかりませんでした．どのように考えればよいのでしょうか．

お答え： $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ と「適当に」パラメータ表示して，前者のように計算する．この値が曲線のパラメータ表示のとりかたによらない，すなわちパラメータ表示はなんでもよい，という気持ちを表したのが後者の式．

質問 17： 第 1 基本量は確かに曲線の長さを求める上で基本量っぽい感じがしましたが，第 1 というのは第 2 に較べてわかりやすいから第 1 なのでしょうか．それとも先につくられた概念だからでしょうか？

お答え： 第一基本量は曲面のパラメータ表示の 1 階微分から定まる量，第二基本量は 2 階までの微分から定まる量，という意味では第一基本形式のほうが primary な気がしますね．

質問 18： 第一基本量を E, F, G と表すのはわかったが，A, B, C, D はどこへいったのか．（第一という名前から個人的には A から始まっているのが自然に思える．A, B, C, D は他で使われている？） **お答え：**古来の習慣．

質問 19： 第一基本形式について，du^2, $du\,dv$, dv^2 がありましたが，これは記法として書いているのだと思ったのですが，実際に第一基本形式の値を求めるときはどのようになるのでしょうか．

お答え： 第一基本形式は数ではないので「値」は定まりません．

質問 20： 第一基本量が 3 つあり，それらを互いに区別する呼び方が存在しないようなので，解答でどのように書くべきか困りました．「第一基本量を E, F, G とすると〜」のように書くのが良いでしょうか．もしくは E, F, G と書けば何も断らなくても第一基本量を表すとしてよいのでしょうか． **お答え：**この文脈では前者でよい．

質問 21： （前回の）質問 9 のお答えに関する質問です．$\varphi\colon \mathbb{R}^2/\{(u,v)|u = 0 \text{ または } v = 0\} \in (u,v) \mapsto (|u|, |v|) \in \mathbb{R}^2$ とすれば問題 1-3 の反例となっているでしょうか．それとも $\mathbb{R}^2/\{(u,v)|u = 0 \text{ または } v = 0\}$ は領域の定義を満たしていないのでしょうか． **お答え：**記号ですが / でなく \ なのではないでしょうか．そうだとして，お考えの集合は連結でないので，この講義で使う用語としての「領域」の条件を満たしてません．

質問 22： 2 変数関数の極限 $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \alpha$ は $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - \alpha| < \varepsilon$ と定義されますが，$(x,y) \to (a, +\infty)$ のときは $|x - a| < \delta$ の帯を，さらに $\exists M > 0$, $y > M$ として考えればよいのでしょうか．($\lim_{(x,y)\to(a,\infty)} f(x,y) = \alpha := \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0, \exists M > 0\ |x-a| < \delta \wedge y > M \Rightarrow |f(x,y) - \alpha| < \varepsilon$?)

お答え： それでよいと思います．記号 “:=” は “⇔” などのほうが自然かも．$(x, \frac{1}{y}) \to (a, +0)$ と考えてもよいですね．

質問 23： 問題 2-1 は面積が有界の領域において，その領域をパラメータが動いた長さが発散するようにパラメータをとることができていますが，これは体積が有界の領域においてその領域を動いた面積が発散するようにパラメータをとることができるのでしょうか． **お答え：**「これは」はどこにつながる？後半の意味をとることができません．

3 第一基本形式・第二基本形式

■パラメータ変換（再掲）

定義 3.1. $\mathbb{R}^2$ の領域 D から $\mathbb{R}^2$ の領域 U への写像

$$\varphi\colon D \ni (\xi,\eta) \longmapsto (u,v) = \bigl(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)\bigr) \in U \tag{3.1}$$

が**微分同相写像** diffeomorphism であるとは，[1] φ は全単射．[2] φ と φ^{-1} はともに C^∞-級となること．

問 3.2. 式 (3.1) の φ が微分同相写像ならば，D の各点で次が成立することを示しなさい：

$$\det J \neq 0 \qquad J := \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}. \qquad (J \text{ を } \varphi \text{ のヤコビ行列 (Jacobian matrix) という．}) \tag{3.2}$$

問 3.3. 正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ と，(3.1) の形の微分同相写像 φ に対して $\tilde{p}(\xi,\eta) := p\bigl(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)\bigr)$ とおくと， $\tilde{p}\colon D \to \mathbb{R}^3$ は正則な曲面のパラメータ表示を与えることを示しなさい．この $\tilde{p}$ は「p からパラメータ変換 φ で得られる」という．誤解の恐れがないときは，$\tilde{p}(\xi,\eta)$ を $p(\xi,\eta)$ と書くことがある．

問 3.4. 曲面の面積はパラメータのとりかたによらないことをきちんと述べて示しなさい．

■単位法線ベクトル 正則な曲面 S のパラメータ表示 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ ($U \subset \mathbb{R}^2$ は領域) に対して $\mathrm{P} := p(u_0, v_0)$ ($(u_0,v_0) \in U$) を一つ固定するとき，$p_u(u_0,v_0)$, $p_v(u_0,v_0)$ は 1 次独立なベクトルである．

- $p_u(u_0,v_0)$, $p_v(u_0,v_0)$ が生成する 2 次元空間は，曲面 S の P における接平面に平行である．
- 零でないベクトル $p_u(u_0,v_0) \times p_v(u_0,v_0)$ の向きは，S の P における接平面に垂直な方向を与える．

定義 3.5. 正則な曲面 S のパラメータ表示 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ に対して，

- $(u,v) \in U$ における（または $\mathrm{P} = p(u,v)$ における）S の**単位法線ベクトル**とは，P における曲面の接平面に垂直な単位ベクトルのことである．
- なめらかな写像 $\nu\colon U \to \mathbb{R}^3$ が，パラメータ表示された曲面 p の**単位法線ベクトル場**であるとは，各 (u,v) で $\nu(u,v)$ が p の (u,v) における単位法線ベクトルを与えていることである．

問 3.6. (1) 曲面のパラメータ表示 $p(u,v)$ に対して $\nu(u,v) := \frac{p_u(u,v) \times p_v(u,v)}{|p_u(u,v) \times p_v(u,v)|}$ は単位法線ベクトル場である．

(2) $\tilde{p}$ を問 3.3 のように p からパラメータ変換で得られる曲面とするとき，次を示しなさい：

$$\frac{\tilde{p}_\xi \times \tilde{p}_\eta}{|\tilde{p}_\xi \times \tilde{p}_\eta|} = \varepsilon \frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|}, \qquad \varepsilon = \operatorname{sgn}\det\begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}.$$

ただし，この等式の右辺は $\bigl(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)\bigr)$ における値を，左辺は (ξ,η) における値を表す．

(3) $\hat{p}(u,v) = Rp(u,v) + \boldsymbol{q}$ (R は 3 次の直交行列，$\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^3$) とおくとき，次を示しなさい：

$$R\frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|} = \varepsilon\left(\frac{\hat{p}_u \times \hat{p}_v}{|\hat{p}_u \times \hat{p}_v|}\right), \qquad \varepsilon = \det R.$$

2019 年 12 月 19 日

■曲面の接平面・接ベクトル空間． 正則にパラメータ表示された曲面 $p(u,v)$ 上の点 $\mathrm{P}=p(u_0,v_0)$ において曲面に接するベクトルは

$$\boldsymbol{v}=\alpha p_u(u_0,v_0)+\beta p_v(u_0,v_0) \qquad (\alpha,\beta\in\mathbb{R}) \tag{3.3}$$

の形に表される．正則性の条件から (3.3) の形のベクトル全体は $\mathbb{R}^3$ の 2 次元線形部分空間を与える．これを曲面 $p(u,v)$ の P における**接ベクトル空間・接平面**とよび V_{P} と書く[*1]．ベクトルの組 $\{p_u(u_0,v_0),p_v(u_0,v_0)\}$ は，接平面の一つの基底を与える．

問 3.7. 曲面 $\tilde p(\xi,\eta)$ が曲面 $p(u,v)$ からパラメータ変換 $u=u(\xi,\eta)$, $v=v(\xi,\eta)$ で得られるとき，

$$(\tilde p_\xi,\tilde p_\eta)=(p_u,p_v)J \qquad (J\text{ は (3.2) のヤコビ行列}) \tag{3.4}$$

が成り立つことを示しなさい．ここで p_u, p_v などは列ベクトル，(p_u,p_v) はそれらを並べた 3×2 行列．

■接平面と $\mathbb{R}^2$ との対応． いままでの状況で，曲面の点 P における接平面 V_{P} と $\mathbb{R}^2$ の間に線形同型

$$V_{\mathrm{P}}\ni\boldsymbol{v}=\alpha p_u(u_0,v_0)+\beta p_v(u_0,v_0)\longmapsto\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \tag{3.5}$$

が得られる．この第一成分，第二成分をそれぞれ

$$\begin{aligned} du\colon V_{\mathrm{P}}\ni\boldsymbol{v}=\alpha p_u(u_0,v_0)+\beta p_v(u_0,v_0)\longmapsto\alpha\in\mathbb{R},\\ dv\colon V_{\mathrm{P}}\ni\boldsymbol{v}=\alpha p_u(u_0,v_0)+\beta p_v(u_0,v_0)\longmapsto\beta\in\mathbb{R}\end{aligned} \tag{3.6}$$

と書けば，du, dv は V_{P} から $\mathbb{R}$ への線形写像である[*2]．

問 3.8. 問 3.3 のようなパラメータ変換で曲面を (ξ,η) によってパラメータ表示するとき，同様に V_{P} から $\mathbb{R}$ への線形写像 $d\xi$, $d\eta$ を考えることができる．このとき，次を確かめなさい．

$$\begin{pmatrix}du\\ dv\end{pmatrix}=J\begin{pmatrix}d\xi\\ d\eta\end{pmatrix} \qquad \text{すなわち} \qquad \begin{cases}du=u_\xi\,d\xi+u_\eta\,d\eta\\ dv=v_\xi\,d\xi+v_\eta\,d\eta\end{cases} \qquad (J\text{ は (3.2) のヤコビ行列}). \tag{3.7}$$

問 3.9. 変数 (u,v) に関する C^∞-級関数[*3] $f(u,v)$ を考える．問 3.3 のようなパラメータ変換により $\tilde f(\xi,\eta)=f\bigl(u(\xi,\eta),v(\xi,\eta)\bigr)$ と定めるとき，次を確かめなさい：

$$\tilde f_\xi\,d\xi+\tilde f_\eta\,d\eta=f_u\,du+f_v\,dv. \tag{3.8}$$

問 3.9 の状況で，誤解の恐れがないときは $\tilde f(\xi,\eta)$ を $f(\xi,\eta)$ と書いてしまうことがある．このとき (3.8) は $f_\xi\,d\xi+f_\eta\,d\eta=f_u\,du+f_v\,dv$ と書ける．いま

$$df:=f_u\,du+f_v\,dv \tag{3.9}$$

とおき，これを f の**微分**，**全微分**または**外微分**とよぶ．すると問 3.9 は「**関数の全微分はパラメータのとり方によらない**」と言い換えることができる．

[*1] 記号 V_{P} はこの場での一時的なものである．一般的には $dp(T_{(u_0,v_0)}\mathbb{R}^2)$ などと書くべきだが，この記号の構成要素を説明するのが面倒なのでこのような記号を用いた．多様体を学んだあとで「定義域の接空間の，はめこみの微分写像による像」という文が通じると思う．

[*2] 一般に $\mathbb{R}$ 上の線形空間 V から $\mathbb{R}$ への線形写像を**線形形式**または**一次形式**という．

[*3] ここでは，とくに断らない限り関数などの微分可能性は C^∞ を仮定する．以後，しばしば C^∞-級を省略する．

■2 次形式（線形代数の復習）． 以下 V を $\mathbb{R}$ 上の n 次元線形空間とする．

定義 3.10. 写像 $b\colon V\times V\to\mathbb{R}$ が**対称双線形形式**または **2 次形式**であるとは (1) 任意の $\boldsymbol{v}\in V$ に対して $b(\boldsymbol{v},\cdot)\colon V\to\mathbb{R}$, $b(\cdot,\boldsymbol{v})\colon V\to\mathbb{R}$ がともに線形写像（双線形性），(2) 任意の $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}\in V$ に対して $b(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=b(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})$ （対称性）をみたすことである．

例 3.11. 線形空間 V の**内積**とは，V の対称双線形形式 g で，次の性質（正値性）を満たすものである：任意の $\boldsymbol{v}\in V\setminus\{0\}$ に対して $g(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})>0$.

問 3.12. 線形空間 V の基底 $\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n\}$ をとるとき，V 上の対称双線形形式 b に対して，次を示しなさい：

$$b(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\sum_{i,j=1}^n v_iw_jb_{ij}\qquad\left(\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^n v_i\boldsymbol{a}_i,\quad \boldsymbol{w}=\sum_{j=1}^n w_j\boldsymbol{a}_j,\quad b_{ij}:=b(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j)\right).$$

ここに現れる n 次対称行列 $B=(b_{ij})$ を，**対称双線形形式 b の基底 $\{\boldsymbol{a}_j\}$ に関する表現行列**という．

問 3.13. 問 3.12 の状況で，

$$V\ni\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^n v_i\boldsymbol{a}_i\longmapsto\hat{\boldsymbol{v}}:={}^t(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n$$

により V と $\mathbb{R}^n$ を同一視すると $b(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})={}^t\hat{\boldsymbol{v}}B\hat{\boldsymbol{w}}$ と書けることを確かめなさい．

問 3.14. 問 3.12, 3.13 の状況で，別の V の基底 $\{\tilde{\boldsymbol{a}}_1,\dots,\tilde{\boldsymbol{a}}_n\}$ をとると，n 次正則行列 $J=(m_{ij})$（**基底変換行列**）が存在して

$$\tilde{\boldsymbol{a}}_j=\sum_{k=1}^n m_{kj}\boldsymbol{a}_k,\qquad\text{すなわち}\qquad(\tilde{\boldsymbol{a}}_1,\dots,\tilde{\boldsymbol{a}}_n)=(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n)J$$

を満たす．このとき，対称双線形形式 b の基底 $\{\boldsymbol{a}_j\}$ に関する表現行列 B と $\{\tilde{\boldsymbol{a}}_j\}$ に関する表現行列 $\widetilde{B}$ は，関係式 $\widetilde{B}={}^tJBJ$ を満たすことを確かめなさい．

■第一基本形式． 曲面のパラメータ表示 $p(u,v)$ を 2 変数関数の組 $(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ と考え，全微分

$$dp=(dx,dy,dz)=p_u\,du+p_v\,dv$$

を考える．とくに問 3.9 から dp はパラメータのとり方によらない[*4]．

定義 3.15. 次の「式」を曲面 $p(u,v)$ の**第一基本形式**という：

$$ds^2:=dp\cdot dp=(p_u\,du+p_v\,dv)\cdot(p_u\,du+p_v\,dv)=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2=(du,dv)\,\widehat{I}\begin{pmatrix}du\\dv\end{pmatrix}$$

ただし $E=p_u\cdot p_u$, $F=p_u\cdot p_v$, $G=p_v\cdot p_v$, は第一基本量で，$\widehat{I}:=\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}$ （これを**第一基本行列**とよぶ）.

問 3.16. 点 $\mathrm{P}=p(u_0,v_0)$ を一つ固定し，第一基本量などはその (u_0,v_0) での値を考えるとする．このとき，

[*4] これまでは P を固定して考えていたが，以後，$\omega:=\alpha\,du+\beta\,dv$ の α, β は (u,v) の関数と考える．このとき ω を**曲面上の 1 次微分形式**とよぶ．

- 第一基本行列 $\widehat{I}$ は，接平面 $V_{\mathrm{P}} \subset \mathbb{R}^3$ の内積（$\mathbb{R}^3$ の標準内積 “$\cdot$” の制限）の，V_{P} の基底 $\{p_u(u_0,v_0), p_v(u_0,v_0)\}$ に関する表現行列である．
- 問 3.3 のパラメータ変換によるパラメータ表示 $p(\xi,\eta)$ の第一基本行列を $\widetilde{\widehat{I}}$ とすると $\widetilde{\widehat{I}} = {}^tJ\,\widehat{I}\,J$ である．ただし J は (3.2) のヤコビ行列である．
- 接平面 V_{P} 上のベクトル $\boldsymbol{v} = \alpha\, p_u + \beta\, p_v$, $\boldsymbol{w} = \alpha'\, p_u + \beta'\, p_v$ に対して

$$|\boldsymbol{v}|^2 = E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2 = (\alpha,\beta)\,\widehat{I}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = \alpha\alpha' E + (\alpha\beta' + \beta\alpha')F + \beta\beta' G = (\alpha,\beta)\,\widehat{I}\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\end{pmatrix}.$$

問 3.17. パラメータ表示された曲面 $p(u,v)$ に対して，$\hat{p}(u,v) = Rp(u,v) + \boldsymbol{b}$ (R は 3 次の直交行列，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$) とするとき，$p$ の第一基本量と $\hat{p}$ の第一基本量が一致することを示しなさい．

■第二基本形式． 正則にパラメータ表示された曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトル $\nu(u,v)$ をとる．このとき

$$\begin{aligned} I\!I :&= -dp\cdot d\nu = -(p_u\cdot\nu_u)\,du^2 - (p_u\cdot\nu_v + p_v\cdot\nu_u)\,du\,dv - (p_v\cdot\nu_v)\,dv^2 \\ &= L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = (du,dv)\,\widehat{I\!I}\begin{pmatrix}du\\ dv\end{pmatrix} \qquad \left(\widehat{I\!I} := \begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

を**第二基本形式**，L, M, N を**第二基本量**，$\widehat{I\!I}$ を**第二基本行列**という．

問 3.18. 上の状況で $-p_u\cdot\nu_u = p_{uu}\cdot\nu$, $-p_u\cdot\nu_v = -p_v\cdot\nu_u = p_{uv}\cdot\nu$, $-p_v\cdot\nu_v = p_{vv}\cdot\nu$ となることを示しなさい．とくに，$M = -p_u\cdot\nu_v = -p_v\cdot\nu_u$.

問 3.19. 正則曲面 $p(u,v)$, $\tilde{p}(\xi,\eta)$ が問 3.3 のようなパラメータ変換で移り合うとき，$\tilde{\nu}(\xi,\eta) = \nu(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta))$ は $\tilde{p}$ の単位法線ベクトルを与える．この単位法線ベクトルに対して $\tilde{p}$ の第二基本行列を $\widetilde{\widehat{I\!I}}$ とすると $\widetilde{\widehat{I\!I}} = {}^tJ\,\widehat{I\!I}\,J$ が成り立つことを確かめなさい．ただし J は (3.2) のヤコビ行列である．

問 3.20. 正則曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトルを $\nu(u,v)$ とする．直交行列 R と定ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して $\hat{p}(u,v) := Rp(u,v) + \boldsymbol{a}$, ($\hat{\nu} := R\nu$) とおくと $\hat{\nu}$ は $\hat{p}$ の単位法線ベクトルで，$\hat{\nu}$ に対する $\hat{p}$ の第二基本形式は p の第二基本形式と一致することを示しなさい．

問題

3-1 パラメータ表示

$$p(\xi,\eta) = (\operatorname{sech}\eta\cos\xi, \operatorname{sech}\eta\sin\xi, \tanh\eta) \qquad (-\pi < \xi < \pi, -\infty < \eta < \infty)$$
$$\tilde{p}(u,v) = \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2}\right) \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(u,0)\,;\, u \leqq 0\}$$

の像は同じ $\mathbb{R}^3$ の部分集合であることを示し，(ξ,η) と (u,v) の間のパラメータ変換を求めなさい．

3-2 パラメータ表示された曲面 $p(u,v) = (\operatorname{sech} v\cos u, \operatorname{sech} v\sin u, v - \tanh v)$ $(-\pi < u < \pi, v > 0)$ に対して，第二基本形式が

$$I\!I = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 2\widetilde{M}\,d\xi\,d\eta$$

となるような座標変換 $(\xi,\eta) \mapsto (u,v)$ を求めなさい．さらに，そのとき (ξ,η) に関する第一基本量を求めなさい．