2019 年 12 月 26 日 (2020 年 1 月 9 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二（MTH.B212）講義資料 4

お知らせ

本日の提出物締め切りは **2020 年 1 月 6 日 10:00** といたします．; 良いお年をお迎えください．

前回までの訂正

- 黒板に大岡山の緯度を 31.61N と書いた模様です．正しくは 36.61N です．
- 黒板で「地球の半径」が $40,000\mathrm{km}/(2\pi) = 9,700\mathrm{km}$ というように見えたとのご指摘がありました．たぶん “$\times R$” の “$\times$” が落ちたのだと思いますが，$9,700\mathrm{km}$ は大岡山とパリを結ぶ最短線の長さです．
- 講義で球面上のピタゴラスの定理を紹介したときにテイラー展開の変数の書き間違いがあったようです：$\cos\frac{c}{r} = 1 - \frac{b^2}{2r} + o\left(\frac{1}{r^2}\right)$ $\Rightarrow \cos\frac{c}{r} = 1 - \frac{c^2}{2r} + o\left(\frac{1}{r^2}\right)$.
- 問題 2-2 (3) のコメントで，元の問題に $q(\xi,\eta)$ とあったものを黒板で $\tilde{p}(\xi,\eta)$ と書いたようです．

授業に関する御意見

- 物事の定義を理解するためには，それに関わる物事に触れるようにすることが正しい姿勢なのかもしれませんね．　**山田のコメント：** 具体的な状況がわかりません．
- 今後問題の答案に（め）を使用してもよいですか？　**山田のコメント：** おすすめしません．
- 2-1 を解く時，パラメータ表示から曲面をうまく想像することができかったので，$(\operatorname{sech} v,\ v - \tanh v)$ を回転させたものという考え方が興味深かったです．
  山田のコメント： わかってしまうと簡単なんですけどね．
- 行列によって式の見通しがよくなる実感を得ました．　**山田のコメント：** だから行列表示は大事．
- だんだんむずかしくなってきたように感じます．置いていかれないようにがんばります．　**山田のコメント：** 置いていかないようがんばります．
- 特にないです．　**山田のコメント：** そう？

質問と回答

質問 1： 第一基本量は積分することで面積を求められたが第二基本量には何か意味づけがあるのですか　**お答え：**はい．

質問 2： 第一基本形式や第二基本形式を定義してしまえば，これらはパラメータ変換のヤコビアン（原文ママ：ヤコビ行列のことか）を J とするとき $\hat{\hat{\bigcirc}} = {}^tJ\hat{\bigcirc}J$ $(\bigcirc = I,\ II)$ の形で書けることから $A = \widehat{I}^{-1}\widehat{II}$ を考えればパラメータ変換で $\widetilde{A} = {}^tJAJ$ となって都合が良いのは分かりました．しかしそもそもなぜ第一基本形式や第二基本形式が考え出されたのか疑問に思ったので教えてください．　**お答え：**山田が考え出したわけではないので回答できませんが，曲面論の基本定理「第一基本量と第二基本量が曲面を決定する」からこれらが曲面の基本的な量．

質問 3： 第二基本量の基本量っぽさがまったくつかめていないのですが，それはそもそも曲面の 2 階微分がなにを表すのかがつかめていないからのように思いました．曲面の 2 階微分を表すものとしてわかりやすいものはないでしょうか？　**お答え：**(1) 曲面の 2 階微分そのものではだめ? (2) 曲線の場合はどうだった?

質問 4： 第二基本形式で法線ベクトルを用いたのは，微分同相なパラメータ変換に，法線ベクトルがよらないからですか．　**お答え：**「から」ではないですが，単位法線ベクトルはパラメータのとり方によりません．

質問 5： 正則にパラメータ表示された曲面 $p(u,v)$ の単位法線 $\nu(u,v)$ をとる，と配布資料の 6 ページ目にありますが，$\nu(u,v) = \pm\frac{p_u(u,v)\times p_v(u,v)}{|p_u(u,v)\times p_v(u,v)|}$ の 2 通りのとり方が考えられると思います．このとり方によっては L, M, N の符号が変わってしまうのではないかと思います．　**お答え：**はい，そのとおりです．

質問 6： 第二基本量の定義における ν は 2 つの向きがある定義になってしまいますが，その向きの違いがある上での L, M, N の定義で問題はないのでしょうか．　**お答え：**なので「単位法線ベクトル」を決めると決まる．

質問 7： 単位法線ベクトルは $\nu(u,v) = \pm\frac{p_u\times p_v}{|p_u\times p_v|}$ の $\pm$ で 2 種類あると思ったのですが，断りがない限りは好きな方を使ってよいですか．　**お答え：**はい．

質問 8： 第二基本形式の定義で向きを指定しなかったのは向き付け不可能な曲面（メビウスの帯など）が存在するからですか．　**お答え：**それと，向きをちゃんと扱うのは面倒だから．

質問 9： 第二基本量はなぜ導入したのでしょうか．$\nu(u,v) = \frac{p_u\times p_v}{|p_u\times p_v|}$ ですか？　**お答え：**曲面論の基本定理，はい．

質問 10： 曲線のときは曲率や長さなどパラメータ変換によってかわらない値を最初にならったが，曲面ではパラメータ変換によってかわらない形式を最初にならった．曲面ではパラメータ変化によってかわらない値はない？

お答え： それを今回つくる，と講義で述べたはずだが．

質問 11： パラメータ変換で得られた曲面の微分と元の曲面の微分，ヤコビ行列の間の $(\tilde{p}_\xi, \tilde{p}_\eta) = (p_u, p_v)J$ という関係式は非常に簡潔で便利だと感じましたが，2 階微分の場合も同じように行列を用いて表すことはできるのでしょうか． **お答え：**やってみるとよいと思います．座標変換の 2 階微分が入りますので，複雑ですね．

質問 12： 面積はパラメータによらないので，それに関連する微分形式でパラメータによらないものがありそうな気がするんですがありますか？ **お答え：**面積要素 $\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$ は（積分の中身として）パラメータによらない．

質問 13： 問 3-4 などで「パラメータによらない」とは微分同相写像で互いに変換されるパラメータについて不変であるということですか． **お答え：**はい．ただし「微分同相写像で互いに変換される」は不要．

質問 14： φ^{-1} が C^∞ であることとヤコビ行列式が各点で $\neq 0$ であることがなぜ同値なのかわからないです．

お答え： 逆写像が C^∞ ならば，$J_\varphi J_{\varphi^{-1}} = I =$ 単位行列 なのでヤコビ行列 J_φ は正則．一方，逆関数定理（テキスト定理 A-I.5）から，P で $\det J_\varphi$ が消えていなければ P の近傍で C^∞-級の逆写像が存在する．もし φ が全単射なら逆写像は存在するが，逆写像の一意性から，それは逆関数定理から保証される C^∞-級の逆写像と一致する．

質問 15： φ が C^∞ でも φ^{-1} が C^∞ とは限らないというのは $\varphi(x) = x^3$ の例でわかったのですが，φ が C^∞ ならば φ^{-1} はなめらかということは言えるのではないでしょうか？ **お答え：**「関数 φ^{-1} がなめらか」の定義は? この講義では「関数 φ^{-1} が C^∞-級」の意味ですが．ひょっとして関数と関数のグラフを混同していませんか？

質問 16： ある関数 f がなめらかで，だからといって微分可能でなく，また，微分可能だからといってなめらかでもないことから（漠然とした質問ですが）この 2 つは関連があまりないということですか．

お答え：「関数が滑らか」の定義と「関数のグラフが滑らかな曲線・曲面」ということの定義を混同していませんか？

質問 17： 問題 2-2 でも出てくる du, dv, $d\xi$, $d\eta$ などの正体をまだつかめていません．結局こいつらも写像ですか？

お答え：「微分形式」を学ぶと写像と思えるが，ここでは「記号」と思う．無理やり意味づけると，これらは行ベクトルに値を持つ関数 $du := \frac{1}{EG-F^2}{}^t(Gp_u - Fp_v)$, $dv := \frac{1}{EG-F^2}{}^t(-Fp_u + Ep_v)$．ただし E, F, G は (u, v) に関する曲面の第一基本量．このとき $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ は行列の積 $({}^t du, {}^t dv)\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} du \\ dv \end{smallmatrix}\right)$ とみなせばよい．

質問 18： 特異点の近くの部分を切り取り，切り口に当てはまる曲面を張り合わせる（原文ママ：多分「貼り合わせる」）ことで特異点のある曲面でも曲率の積分の計算ができるのでしょうか． **お答え：**特異点を境界とする広義積分とみなせば意味をもつ（曲面を貼り合わせなくてもよい）．特異点をもつ曲面における全曲率やガウス・ボンネの定理は，梅原雅顕・佐治健太郎・山田光太郎「特異点をもつ曲線と曲面の微分幾何学」，丸善出版，2017.

質問 19： 前回の問 2-2 で積分の計算がわからず諦めてしまいました．結果としては楕円積分の形で初等関数でかけないということでしたが，パラメータ変換をしても第一基本形式が変わらないので，楕円積分のまま変わることはないのでしょうか． **お答え：**パラメータ変換が初等関数で表されるものであれば，積分が初等関数で表されない，という性質も保たれます（初等関数の定義からわかる）．初等関数でないパラメータ変換を許せばどうにでもなる．

質問 20： 3-1 の問題は $p(\xi, \eta)$ がメルカトル図法の変換で $\tilde{p}(u, v)$ が球面の立体射影の変換であり，メルカトル図法は地球の立体射影に等しいから「像は同じ部分集合」になるのかと思ったのですが，メルカトル図法のやりかたが立体射影なのかと言われるとそれは違う気がしました．どういう関係なのでしょうか． **お答え：**最初の「立体射影」と次の「立体射影」の意味が違うように思えました．言葉を繰るのではなく式で計算しましょう．

質問 21： 今回の問題 3-2 のように適当に座標を回転させると，$II = 2\widetilde{M}\,d\xi\,d\eta$ の形に直せるのでしょうか．

お答え： 一般の曲面に対してはいいえ．第二基本行列の行列式が負（今回定義するガウス曲率が負になることと同値）であれば，ご質問の形になるようなパラメータ（漸近線座標，テキスト付録 B-5）が存在する．

質問 22： 一般に (ξ, η) と (u, v) の座標変換の写像は一意に決まるのですか？ **お答え：**どういう状況を考えている？

質問 23：「母線」とは回転体に対して定義される **お答え：**いいえ，回転面に対してです．

質問 24： 3 平方の定理を余弦定理に拡張するように the pythagorian formula も直角三角形でない三角形に拡張できるのでしょうか． **お答え：**はい．球面の場合は「球面三角法」の公式の一つとなります．調べてみましょう．

質問 25： 第一基本量や第二基本量の E, F, G, L, M, N の由来はなんでしょう． **お答え：**たぶん Gauss に始まる記号と思います．C. F. Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingesis Recentiores Vol. VI (1827), pp. 99–146（英訳もある）．この §11 に，E, F, G がこの講義と全く同じ意味で定義されています．ひょっとしたら L, M, N の由来は違うかもしれません．

質問 26： 講義に出てきたピタゴラスの定理はおそらくピタゴラスが生きていた時代には存在しなかったものだと思うのですが，（平面上での）ピタゴラスの定理の拡張でなくなぜピタゴラスの定理という，そのままの名前で呼ばれているのでしょうか．ピタゴラス本人の考案したものではないのにそう呼ばれていると考えると少し変におもいました． **お答え：**一般的な呼称（多数派）を調べていませんので，この呼称は山田の個人的なものと思ってください．とはいえ，このような状況は「n 次元ユークリッド空間」などさまざまな場面で現れます．探してみましょう．

4 主曲率・ガウス曲率・平均曲率

■単位法線ベクトル

定義 4.1. 正則な曲面 S のパラメータ表示 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ に対して,

- $(u,v) \in U$ における（または $\mathrm{P} = p(u,v)$ における）S の**単位法線ベクトル**とは, P における曲面の接平面に垂直な単位ベクトルのことである.
- なめらかな写像 $\nu\colon U \to \mathbb{R}^3$ が, パラメータ表示された曲面 p の**単位法線ベクトル場**であるとは, 各 (u,v) で $\nu(u,v)$ が p の (u,v) における単位法線ベクトルを与えていることである.

問 4.2. (1) 曲面の助変数表示 $p(u,v)$ に対して $\nu(u,v) := \frac{p_u(u,v)\times p_v(u,v)}{|p_u(u,v)\times p_v(u,v)|}$ は単位法線ベクトル場である.

(2) $\tilde p$ を p からパラメータ変換 $(\xi,\eta)\mapsto(u,v)$ で得られる曲面とするとき, 次を示しなさい：

$$\frac{\tilde p_\xi \times \tilde p_\eta}{|\tilde p_\xi \times \tilde p_\eta|} = \varepsilon \frac{p_u\times p_v}{|p_u\times p_v|} \qquad \varepsilon = \operatorname{sgn}\det\begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta\end{pmatrix}$$

(3) $\hat p(u,v) = Rp(u,v) + \boldsymbol{q}$ (R は 3 次の直交行列, $\boldsymbol{q}\in\mathbb{R}^3$) とおくとき, 次を示しなさい：

$$R\frac{p_u\times p_v}{|p_u\times p_v|} = \varepsilon\left(\frac{\hat p_u\times \hat p_v}{|\hat p_u\times\hat p_v|}\right) \qquad \varepsilon = \det R.$$

■第二基本形式（再掲） 正則にパラメータ表示された曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトル $\nu(u,v)$ をとるとき,

$$\begin{aligned} I\!I :&= -dp\cdot d\nu = -(p_u\cdot\nu_u)\,du^2 - (p_u\cdot\nu_v + p_v\cdot\nu_u)\,du\,dv - (p_v\cdot\nu_v)\,dv^2 \\ &= L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = (du,dv)\,\widehat{I\!I}\begin{pmatrix} du \\ dv\end{pmatrix} \qquad \left(\widehat{I\!I} := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

を**第二基本形式**, L, M, N を**第二基本量**, $\widehat{I\!I}$ を**第二基本行列**という.

問 4.3. 上の状況で $-p_u\cdot\nu_u = p_{uu}\cdot\nu$, $-p_u\cdot\nu_v = -p_v\cdot\nu_u = p_{uv}\cdot\nu$, $-p_v\cdot\nu_v = p_{vv}\cdot\nu$ となることを示しなさい. とくに, $M = -p_u\cdot\nu_v = -p_v\cdot\nu_u$.

問 4.4. 曲面 $p(u,v)$, $\tilde p(\xi,\eta)$ がパラメータ変換 $(\xi,\eta)\mapsto(u,v)$ で移り合うとき, $\tilde\nu(\xi,\eta) = \nu(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta))$ は $\tilde p$ の単位法線ベクトルを与える. この単位法線ベクトルに対して $\tilde p$ の第二基本行列を $\widetilde{\widehat{I\!I}}$ とすると $\widetilde{\widehat{I\!I}} = {}^tJ\,\widehat{I\!I}\,J$ が成り立つことを確かめなさい. ただし J はパラメータ変換のヤコビ行列である.

問 4.5. 曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトルを $\nu(u,v)$ とする. 直交行列 R と定ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して $\hat p(u,v) := Rp(u,v) + \boldsymbol{a}$, $\hat\nu := R\nu$ とおくと $\hat\nu$ は $\hat p$ の単位法線ベクトルで, $\hat\nu$ に対する $\hat p$ の第二基本形式は p の第二基本形式と一致することを示しなさい.

■ガウス写像 曲面 $\mathbb{R}^3$ の曲面 S の単位法線ベクトル場 ν をとるとき,

$$\nu\colon S\ni \mathrm{P}\longmapsto \nu(\mathrm{P})\in S^2\subset\mathbb{R}^3 \tag{4.1}$$

を曲面 S の**ガウス写像**という. ここで S^2 は $\mathbb{R}^3$ の原点を中心とする半径 1 の球面である：

$$S^2 := \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\,;\,|\boldsymbol{x}| = 1\}.$$

2019 年 12 月 26 日 (2020 年 1 月 9 日訂正)

■ワインガルテン行列　曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトル ν をとり，第一・第二基本行列を $\widehat{I}$, $\widehat{II}$ とする．

問 4.6. (1) $\widehat{I}$ は正則であることを示しなさい．(2) $\widehat{I}$ の固有値は正の実数であることを示しなさい．

定義 4.7. $A := \widehat{I}^{-1}\widehat{II}$ を**ワインガルテン行列**という．

定理 4.8 (ワインガルテンの公式，テキスト 85 ページ，命題 8.5)**.** $(\nu_u, \nu_v) = -(p_u, p_v)A$.

■ガウス曲率・平均曲率．

問 4.9. 曲面 $p(u,v)$ からパラメータ変換 $(\xi,\eta)\mapsto(u,v)$ で得られる曲面 $\tilde{p}(\xi,\eta)$ のワインガルテン行列 $\widetilde{A}$ は $p(u,v)$ のワインガルテン行列 A とパラメータ変換のヤコビ行列を用いて $\widetilde{A} = J^{-1}AJ$ と表されることを確かめなさい．さらに A の固有値はパラメータのとり方によらないことを示しなさい．

問 4.10. 問 4.5 の状況で $\hat{p}$ のワインガルテン行列は p のワインガルテン行列と一致することを示しなさい．

定理 4.11 (テキスト 86 ページ，定理 8.7; 90 ページ，問題 1)**.** ワインガルテン行列の固有値は実数である．

定義 4.12. ワインガルテン行列 A の固有値 κ_1, κ_2 を曲面の**主曲率**，$K := \kappa_1\kappa_2 = \det A$, $H := \frac{\kappa_1+\kappa_2}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{tr} A$ をそれぞれ**ガウス曲率**，**平均曲率**という．

問 4.13. (1) 平面の主曲率は 2 つとも 0 で，ガウス曲率，平均曲率はともに 0 になることを示しなさい．
(2) 半径 r $(r>0)$ の球面の単位法線ベクトルを内向きにとると，ガウス曲率は $1/r^2$，平均曲率は $1/r$.
(3) 正の定数 r に対して $p(u,v) = (r\cos u, r\sin u, v)$ は半径 r の円柱面を与える．この曲面の主曲率，ガウス曲率，平均曲率はそれぞれ $\pm 1/r$ と 0，0，$\pm 1/(2r)$ である．

問題

4-1 区間 $(1,\infty)$ 上で定義された C^∞-級関数

$$f(v) := \log\left(v + \sqrt{v^2-1}\right) - \frac{\sqrt{v^2-1}}{v}$$

に対して，次の曲面のガウス曲率と平均曲率を求めなさい：

$$p(u,v) = \left(\frac{\cos u}{v}, \frac{\sin u}{v}, f(v)\right) \qquad (|u|<\pi, v\in(1,\infty)).$$

4-2 $\mathbb{R}^2$ の原点を含む領域 D 上で定義された曲面 S の正則なパラメータ表示 $p\colon D\to\mathbb{R}^3$ のガウス写像 $\nu\colon D\to S^2\subset\mathbb{R}^3$ をとると，ν もまた $\mathbb{R}^3$ の曲面（球面）のパラメータ表示を与えている（正則かどうかは問わない）．いま，D の原点を中心とする半径 r の閉円板 $\overline{B}_r$ をとり，対応する曲面上の閉領域 $p(\overline{B}_r)$ の面積を A_r，また，$\nu(\overline{B}_r)$ の（単位球面上の部分集合としての）面積を G_r とする．このとき，

$$\lim_{r\to+0}\frac{G_r}{A_r} = |K_0|$$

が成り立つことを示しなさい．ただし K_0 は原点における S のガウス曲率である．（ヒント：ワインガルテンの公式を用いて球面のパラメータ表示としての ν の第一基本形式（これを曲面 p の**第三基本形式**とよぶ）を第一基本量，第二基本量で書き表す．）