2020 年 1 月 9 日 (2020 年 1 月 16 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二（MTH.B212）講義資料 5

お知らせ

- あけましておめでとうございます．成人式を迎える方，おめでとうございます．
- 次回，1 月 16 日に定期試験の予告をします．

前回の補足

- 問題 4-2 に関連して「平均曲率の幾何学的意味」についてのご質問を複数いただきました．たとえば次のような説明がつけられます：問題 4-2 と同じ状況で，$p^t(u,v) := p(u,v) + t\nu(u,v)$ $(t \in \mathbb{R})$ で与えられる曲面 p^t を考える．ただし ν は曲面 p の単位法線ベクトル場．$|t|$ が十分小さければ p^t は $(0,0)$ の近傍 B_r でなめらかな曲面の正則なパラメータ表示を与える（平行曲面）．このとき，$p^t(\overline{B}_r)$ の面積を A_r^t とするとき，
$$A_r^t = A_r - 2t\int_{\overline{B}_r} H(u,v)dA + o(t) \qquad (t \to 0)$$
が成り立つ．ただし $dA = |p_u \times p_v|\,du\,dv$ は p の面積要素．実際，$t \to 0$ のとき，
$$p_u^t \times p_v^t = (p_u + t\nu_u) \times (p_v + t\nu_v) = (p_u \times p_v) + t(\nu_u \times p_v + \nu_v \times p_u) + o(t) = (1-2Ht)(p_u \times p_v) + o(t)$$
となる．最後の等号はワインガルテンの公式による．
- 等温座標系の変換に関する質問がありましたので補足：曲面のパラメータ表示 $p(u,v)$ と，同じ曲面のパラメータ表示 $\tilde{p}(\xi,\eta)$ が与えられているとする．(u,v) が等温座標系であるとき，ξ, η が等温座標系であるための必要十分条件は
$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \varepsilon\frac{\partial v}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\varepsilon\frac{\partial v}{\partial \xi} \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$
が成り立つことである．証明の概略：$|p_u| = |p_v|$, $p_u \cdot p_v = 0$ の条件のもと，$|\tilde{p}_\xi| = |\tilde{p}_\eta|$, $\tilde{p}_\xi \cdot \tilde{p}_\eta = 0$ が成り立つためのパラメータ変換の条件を書き下せばよい．
とくに，$\varepsilon = 1$ のとき，この条件式は Cauchy-Riemann の方程式と呼ばれる（第 1 回の講義で扱った）．

前回までの訂正

- 講義資料 4, 2 ページ，質問 23：対てし ⇒ 対して
- 講義資料 4, 3 ページ，13 行目：**■第二基本形式** ⇒ **■第二基本形式（再掲）**
（第 3 回と同一内容．3 回目であまりきちんとやらなかったのでここに再掲）

授業に関する御意見

- ワインガルテン行列の固有値が曲面の何を表しているのか興味を持ちました．平均曲率の表記がなぜ「H」なのか簡単に調べましたがわかりませんでした．「調和」のフランス語「Harmonie」はどうでしょうか．フランス出身だからといって，フランス語から来ているとは限らないし，平均曲率にどのような印象を持っていたか考える必要があります．
  山田のコメント： なるほど．あまり自信はないですが harmonie はちょっと違うような気がします．ちなみに「調和平均曲率」（二つの主曲率の調和平均）という量を考えることもあります．
- 平均曲率がなぜ H なのかというお話がありましたが，ガウス曲率を G とすることがあるということでしたので，アルファベット順で G の次の H だからなのかもしれないと思いました． **山田のコメント：** なるほど．
- 複数のパラメータ表示があると，計算が不安になったときも別の道で検証ができて助かりました
($p = (\cos u \operatorname{sech} v, \sin u \operatorname{sech} v, v - \tanh v)$ で計算した)． **山田のコメント：** なるほどそうですよね．
- 変わらない量を作るのは難しいがとても大切だと感じた． **山田のコメント：** そうなんです．
- 曲線に比べてパラメータによらない値がとても複雑だった． **山田のコメント：** ですよね．

質問と回答

質問 1： 今回の授業で，正則曲面に対してパラメータによらない量であるガウス曲率と平均曲率を定義することが出来ましたが，そもそもこれらは $p\colon D \to \mathbb{R}^3$ とするときの任意の点 $(u,v)\in D$ を与えれば定まる量ですから，逆にガウス曲率と平均曲率を与えた時に曲面を構成する問題を考えるとき，ガウス曲率や平均曲率はどのような形で与えられることになるのでしょうか． **お答え：**ご質問の意味が分かりません．勝手に推測すると「(u,v) の C^∞-級関数」．ちなみに，ガウス曲率，平均曲率だけでは一般に曲面は定まりません．

質問 2： ガウス曲率，平均曲率が発散することはありますか． **お答え：**正則な曲面上で定義されているので，曲面上の点で発散することはありません．特異点に近づくときに発散することはありえます．擬球面で確かめよ．

質問 3： 曲線のとき，曲率は曲がり具合を円で近似していましたが，そうなると曲面では球で近似するのが自然かなと思いました．少し考えて平均曲率がそれに相当するのかなと思ったのですが，あっていますか？

お答え： いいえ．球面で 2 次近似することはできません．二次曲面を使います．

質問 4： n 次元空間における曲面？（$n-1$ 次元多様体）においても第一基本量や第二基本量のような値が定まり，曲面を決定づけることはできるのでしょうか．また，その上でガウス曲率も定まるのでしょうか．

お答え： $\mathbb{R}^n$ の中の $(n-1)$-次元部分多様体のことを**超曲面** a hypersurface という．単位法線ベクトル場が定義できるので，第一・第二基本形式，ワインガルテン行列も同様に定義され，その固有値（$n-1$ 個ある）を主曲率とよぶところまで同じ．超曲面においても曲面論の基本定理と同様の主張が成り立つ．ガウス曲率の高次元化はちょっと非自明で，「断面曲率」sectional curvature という量が対応する（この講義の範囲外なので「リーマン多様体」の教科書を参照）．なお，主曲率全部の積はガウス・クロネッカー曲率とよばれ，断面曲率とは違った意味を持ちます．

質問 5： 曲面上の固定した一点についての接平面は，その点を原点，接平面を xy 平面としてよいとありましたが，そのように移動することで，偏微分が存在しなくなる点は生じないのでしょうか． **お答え：**パラメータ表示された曲面 $p(u,v)$ を $\tilde{p} = Ap + \boldsymbol{a}$ ($A\in \mathrm{SO}(3)$, $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^3$) に置き換えるだけなので微分可能性はくずれません．

質問 6： 今まで授業中や問題で扱った曲面（擬球面，4-1 の $p(u,v)$）の第一基本量の F，第二基本量の M が 0 なのですが， $F=0$ または $M=0$ のときの曲面の特徴は一般的にありますか？ $F=0 \Leftrightarrow p_u \perp p_v$ だから曲面を長方形にわけられるということですか． **お答え：**$F=M=0$ のとき，曲面のパラメータ (u,v) を**曲率線座標**という．後半は「無限小」長方形で敷き詰められていると考えられる．

質問 7： 今回の問題 4-1 では (u,v) が等温座標系であったと思いますが，第一基本量だけでなく第二基本量もかなり計算しやすい形であったように思います．等温座標系では第二基本量もなんらかの特別な性質をもつのでしょうか？

お答え： とくにそういうことはありません．等温座標系かつ $M=0$，すなわち曲率線座標となるパラメータは**双等温座標系** an isothermic coordinate system といいます．一般の曲面はこのような表示をもちませんが，回転面，平均曲率一定曲面，ガウス曲率一定曲面，二次曲面はこのようなパラメータ表示をもつことが知られています．

質問 8： 曲面上の各点に対して，その点での主曲率を曲率にもつような 2 曲線が存在すると予想しているのですが，これは正しいですか． **お答え：**正しくありません．再来週くらいに説明しますが，空間曲線としての曲率が「法曲率」（今回扱う）と一致するような曲線は測地線になります．一方，法曲率が主曲率と一致する曲線は曲率線と呼ばれます．一般に測地線は曲率線と一致しません．擬球面がその例になっています．

質問 9： 問 4-1 で与えられていた関数 $f(v)$ の $\log$ の部分は $\cosh v$ の逆関数になっていますが，後の項は何かの関数の逆関数なのでしょうか． **お答え：**$v=\cosh w$ とおくと $\tanh w$.

質問 10： 等温座標系の別名が読めなかった（上に聞き逃した）のでもう 1 度教えてください． **お答え：**共形座標系.

質問 11： 曲率で使われていた K という文字に対応する K がガウス曲率で H が平均曲率なのは，ガウス曲率の方が主であるなどの意味合いがあるのでしょうか． **お答え：**たぶん K (die Krümmung) が使われたのは，このような文脈で最初に扱われたからだと思いますが，断言はできません．

質問 12： 第一・第二基本行列を $\widehat{I}$, $\widehat{I\!I}$ としたときに，$A := \widehat{I}^{-1}\widehat{I\!I}$ と定めることで $K=\det A$, $H=\operatorname{tr} A$ (原文ママ：この半分）としていますが，なぜ $\widehat{I}\,\widehat{I\!I}$, $\widehat{I\!I}\,\widehat{I}$, $\widehat{I\!I}^{-1}\widehat{I}$ でなく $\widehat{I}^{-1}\widehat{I\!I}$ が採用されているのでしょうか．

お答え： 最初の二つの行列の固有値はパラメータのとり方による（ヤコビ行列の入り方が $J^{-1}AJ$ の形ではない)．三番目は，第二基本行列が正則でない場合に定義できない．

質問 13： A の固有値が実数なのはなぜですか．

お答え： xy 平面を接平面とするグラフ表示をしてみればよい（というのが前回の講義での説明）.

質問 14： 曲面においてガウス曲率，平均曲率の次元はありますか． **お答え：**それぞれ L^{-2}，L^{-1}.

5 主方向・漸近方向

■接成分，法成分． パラメータ付けられた曲面 $p(u,v)$ 上の点 $\mathrm{P}=p(u_0,v_0)$ を固定する．

(5.1) $$\mathbb{R}^3 = V_{\mathrm{P}} \oplus \mathbb{R}\nu_{\mathrm{P}} \qquad (V_{\mathrm{P}} \text{ は } \mathrm{P}=p(u_0,v_0) \text{ における曲面の接平面}, \ \nu_{\mathrm{P}}=\nu(u_0,v_0))$$

と直和分解できる．ただし $\nu(u,v)$ は p の単位法線ベクトル．したがって任意のベクトル $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ は

(5.2) $$\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}]^{\mathrm{T}} + [\boldsymbol{x}]^{\mathrm{N}} \qquad ([\boldsymbol{x}]^{\mathrm{T}} \in V_{\mathrm{P}}, [\boldsymbol{x}]^{\mathrm{N}} \in \mathbb{R}\nu_{\mathrm{P}})$$

と一通りに分解することができる．

式 (5.2) において $[\boldsymbol{x}]^{\mathrm{N}} = (\boldsymbol{x}\cdot\nu_{\mathrm{P}})\nu_{\mathrm{P}}$, $[\boldsymbol{x}]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x}\cdot\nu_{\mathrm{P}})\nu_{\mathrm{P}}$ である．

■曲面上の曲線． パラメータづけられた曲面 $p(u,v)$ と，uv-平面上の曲線 $\gamma(t)=\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ に対して，空間曲線 $\hat\gamma(t)=p\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ は曲面上の曲線を与える．

問 5.1.
- 曲面上の曲線 $\hat\gamma(t)=p\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ の $\mathrm{P}:=\hat\gamma(t_0)$ における速度ベクトルは次で与えられる．
$$\dot{\hat\gamma}(t_0) = \dot u(t_0)p_u(u_0,v_0) + \dot v(t_0)p_v(u_0,v_0), \qquad (u_0,v_0)=\bigl(u(t_0),v(t_0)\bigr).$$
- 曲面上の曲線 $\hat\gamma(s)=p\bigl(u(s),v(s)\bigr)$ のパラメータ s が弧長であるための必要十分条件は
$$E\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2F\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 1$$
である．ただし E, F, G は p の第一基本量で，$(u,v)=\bigl(u(s),v(s)\bigr)$ で値をとるものとする．

■法曲率． 曲面 $p(u,v)$ 上の点 $\mathrm{P}=p(u_0,v_0)$ を固定する．$\hat\gamma(s)=p\bigl(u(s),v(s)\bigr)$ を，$\mathrm{P}=\hat\gamma(s_0)$ となる曲面上の曲線で s はその弧長パラメータとする．このとき，

$$\hat\gamma''(s_0) = \boldsymbol{\kappa}_g + \boldsymbol{\kappa}_n, \qquad \boldsymbol{\kappa}_g := [\hat\gamma''(s_0)]^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\kappa}_n := [\hat\gamma''(s_0)]^{\mathrm{N}} = \kappa_n\nu_{\mathrm{P}}, \qquad \kappa_n = \hat\gamma''(s_0)\cdot\nu_{\mathrm{P}}$$

とおき，$\boldsymbol{\kappa}_g$，$\boldsymbol{\kappa}_n$，κ_n をそれぞれ曲線 $\hat\gamma$ の P における**測地的曲率ベクトル**，**法曲率ベクトル**，**法曲率** という．

問 5.2. 弧長 s でパラメータづけられた曲面上の曲線 $\hat\gamma(s)=p\bigl(u(s),v(s)\bigr)$ の $\mathrm{P}=\hat\gamma(s_0)$ における法曲率は

(5.3) $$\kappa_n = L\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2M\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

である．ただし L, M, N は p の第二基本量の $(u,v)=\bigl(u(s_0),v(s_0)\bigr)$ での値とする．また，弧長とは限らないパラメータで表された曲線 $\hat\gamma(t)=p\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ $(\mathrm{P}=\hat\gamma(t_0))$ の P における法曲率は次で与えられる：

(5.4) $$\kappa_n = \frac{L(\dot u)^2 + 2M\dot u\dot v + N(\dot v)^2}{E(\dot u)^2 + 2F\dot u\dot v + G(\dot v)^2}.$$

式 (5.4) から，点 P における曲線の法曲率は $(\dot u(t_0),\dot v(t_0))$ の方向のみ，すなわち $\hat\gamma$ の接線の方向のみに依存する．したがって，次の $\kappa_n(\boldsymbol{v})$ は well-defined である：

(5.5) $$\kappa_n(\boldsymbol{v}) := \text{点 P で速度 } \boldsymbol{v} \text{ をもつ曲面上の曲線の P における法曲率} \qquad (\boldsymbol{v}\in V_{\mathrm{P}}\setminus\{\boldsymbol{0}\}).$$

2020 年 1 月 9 日 (2020 年 1 月 16 日訂正)

命題 5.3 (テキスト 94 ページ，定理 9.1)**.** 曲面 p の $\mathrm{P}=p(u_0,v_0)$ における接ベクトル $\boldsymbol{v}\in V_{\mathrm{P}}\setminus\{\boldsymbol{0}\}$ に対して，P を通り，ν_{P} と $\boldsymbol{v}$ に平行な平面 $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ をとり，この平面と曲面の交線を，P における速度ベクトルが $\boldsymbol{v}$ であるような $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ 上の曲線 σ とみなす．このとき，$\kappa_n(\boldsymbol{v})$ は σ の P における（平面曲線としての）曲率と一致する．ただし，$\{\boldsymbol{v},\nu\}$ が $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ の正の基底になるように $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ の向きを定めておく．

問 5.4. 式 (5.5) の写像 $\kappa_n\colon V_{\mathrm{P}}\setminus\{\boldsymbol{0}\}\to\mathbb{R}$ は，次を満たすことを確かめなさい：

$$\kappa_n(\tau\boldsymbol{v})=\kappa_n(\boldsymbol{v})\qquad(\tau\in\mathbb{R}\setminus\{0\});\qquad \text{とくに}\quad \kappa_n(-\boldsymbol{v})=\kappa_n(\boldsymbol{v}). \tag{5.6}$$

命題 5.5 (テキスト 97 ページ，命題 9.3)**.** 法曲率 $\kappa_n\colon V_{\mathrm{P}}\to\mathbb{R}$ の最大値・最小値は P における主曲率である．

点 P における 2 つの主曲率が一致するとき，P を**臍点**（せいてん）という．点 P が臍点でないとき，$\kappa_n(\boldsymbol{v}_j)=\kappa_j$ $(j=1,2)$ を満たすベクトル $\boldsymbol{v}_j\in V_{\mathrm{P}}$ の方向を，P における主曲率 κ_j に対応する**主方向**と呼ぶ．

命題 5.6 (テキスト 97 ページ)**.** 曲面 $p(u,v)$ の臍点でない点 $\mathrm{P}=p(u_0,v_0)$ における主曲率 κ_j に対応する主方向 $\boldsymbol{v}_j$ を $\boldsymbol{v}_j=\alpha_j p_u(u_0,v_0)+\beta_j p_v(u_0,v_0)$ と表すと，${}^t(\alpha_j,\beta_j)$ は P におけるワインガルテン行列 A_{P} の，固有値 κ_j に対応する固有ベクトルである．

■漸近方向.　曲面上の点 $\mathrm{P}=p(u_0,v_0)$ における曲面のガウス曲率が負であるとき，

- $\kappa_n(\boldsymbol{v})=0$ となる方向 $\boldsymbol{v}$ がちょうど 2 つ存在する（**漸近方向**; テキスト 99 ページ，命題 9.8）．
- 曲面の接平面（点 P を通る平面と見なす）と曲面との共通部分は P の近くで P で交わる 2 つの曲線となる．これらの曲線の P における接ベクトルは漸近方向をあたえる（テキスト 100 ページ，定理 9.9）．
- 2 つの漸近方向は，主方向で 2 等分される（テキスト 101 ページ，命題 9.10）．

問題

5-1 曲面 $p(u,v)$ 上の曲線 $\hat\gamma(t)=p\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ の各点 $\hat\gamma(t)$ で $\dot{\hat\gamma}(t)$ が主方向（漸近方向）であるとき，$\hat\gamma(t)$ を**曲率線**（**漸近曲線**）という．特に各 u 曲線，v 曲線が曲率線（漸近曲線）のとき，(u,v) を**曲率線座標**（**漸近線座標**）という．

(1) パラメータ (u,v) が漸近線座標であるための必要十分条件は, 第二基本量が $L=0$, $N=0$, $M\neq0$（したがって，漸近線座標が存在すれば自動的にガウス曲率は負）を満たすことである．これを示しなさい．

(2) 一葉双曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ の曲率線座標と漸近線座標を求めなさい．

5-2 曲面 $p(u,v)$ の第一基本形式が

$$ds^2=e^{2\sigma}(du^2+dv^2)$$

の形をしているとする．ただし σ は (u,v) のなめらかな関数である．

曲面上の曲線 $\hat\gamma(t)=p\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ の加速度ベクトル $\ddot{\hat\gamma}(t)$ の接成分を

$$\Bigl[\ddot{\hat\gamma}(t)\Bigr]^{\mathrm{T}}=A(t)p_u\bigl(u(t),v(t)\bigr)+B(t)p_v\bigl(u(t),v(t)\bigr)$$

と表すとき，$A(t)$, $B(t)$ を u, v の 2 階までの導関数，σ とその偏導関数を用いて具体的に表しなさい．