2020 年 1 月 16 日 (2020 年 1 月 23 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二（MTH.B212）講義資料 6

お知らせ

- 本日は定期試験の予告をいたしました．欠席された方は講義 web ページ，OCW をご覧ください．
- 本日の提出物締め切りは **2020 年 1 月 20 日 10:00** といたします．

前回までの訂正

- 講義中の問題 4-2 の解説で "$\because$" を "$\therefore$" と書き違えたようです．
- 講義で，$\ddot{\hat{\gamma}}(t)$ を接成分 $\left[\ddot{\hat{\gamma}}(t)\right]^{\mathrm{T}}$ と法成分 $\left[\ddot{\hat{\gamma}}(t)\right]^{\mathrm{N}}$ に分解しましたが，テキストでは $\boldsymbol{\kappa}_g(s)$, $\boldsymbol{\kappa}_n(s)$.
- 講義では法曲率を κ_ν と書きましたが，テキストでは κ_n です．テキストに合わせます．
- 講義資料 5，1 ページ，下から 4 行目：不安にに $\Rightarrow$ 不安に
- 講義資料 5，3 ページ，3 行目：叶える $\Rightarrow$ 考える
- 講義資料 5，4 ページ，質問 8 の回答：法曲率が主曲率が $\Rightarrow$ 法曲率が主曲率と

授業に関する御意見

- 色々な座標が出て来て混ざりそうでした．　**山田のコメント：** そうだよね．
- 符号間違えるだけで大変なことになる．　**山田のコメント：** なるほど．
- 曲率線座標，漸近線座標の扱いに慣れたいです．　**山田のコメント：** この科目ではそれほど使わないかも知れません．
- 现在这个課很难了。　**山田のコメント：** 也许吧。

質問と回答

質問 1： $\left[\ddot{\hat{\gamma}}\right]^{\mathrm{N}}$, $\left[\ddot{\hat{\gamma}}\right]^{\mathrm{T}}$ について $\left[\ddot{\hat{\gamma}}\right]^{\mathrm{T}} = (\ddot{\hat{\gamma}}\cdot p_u)p_u + (\ddot{\hat{\gamma}}\cdot p_v)p_v$，$\left[\ddot{\hat{\gamma}}\right]^{\mathrm{N}} = \ddot{\hat{\gamma}} - (\ddot{\hat{\gamma}}\cdot p_u)p_u - (\ddot{\hat{\gamma}}\cdot p_v)p_v$，と表さず，講義や講義資料のように表すのは，そのほうが比較的短いからでしょうか？ それとも私が誤解しているだけで $\left[\ddot{\hat{\gamma}}\right]^{\mathrm{T}} = (\ddot{\hat{\gamma}}\cdot p_u)p_u + (\ddot{\hat{\gamma}}\cdot p_v)p_v$ ではないのでしょうか．

お答え： 誤解しています．ご質問のような式が成り立つためには $\{p_u, p_v\}$ が正規直交系をなしている必要があります．

質問 2： 曲面の直和分解の $[x]^{\mathrm{T}}$，$[x]^{\mathrm{N}}$ の T, N は何ですか？　**お答え：**$\mathbb{R}^3$ の直和分解．Tangent と normal.

質問 3： 授業では主方向の説明がワインガルテン行列の固有ベクトルを p_u，p_v との線型結合で同一視したもの，でした．一方で講義資料では，法曲率を最大・最小にするような方向を主方向とする，という定義でしたが，どちらの定義でもよろしいということでしょうか？　**お答え：**同値なのでどちらでもよいわけです．

質問 4： 授業で主方向の定義をするときに，固有ベクトルに対応する p_u, p_v のことを指していた気がするのですが，その次の対角行列との同値条件をみるに A の固有ベクトルの方向のことを主方向と定義していたのでしょうか．

お答え： 定義は前者．$\mathbb{R}^2$ と曲面の接平面を $(\alpha, \beta) \leftrightarrow \alpha p_u + \beta p_v$ と同一視するが，それを明示しないことがある．

質問 5： 曲率線座標 $\Leftrightarrow I = E\,du^2 + G\,dv^2$ の後の「I が対角行列より $I\!I$ も対角行列」はどのように示されるのですか．

お答え： 曲率線座標なら A の固有ベクトルは ${}^t(1,0)$，${}^t(0,1)$ ととれるから，A は対角．したがって $\widehat{I\!I} = \widehat{I}A$ は対角．

質問 6： 漸近線座標や曲率線座標は必ず存在しますか？ もし存在すれば，あるパラメータが存在すればパラメータ変換によって漸近線座標や曲率線座標になるということですよね？　**お答え：**後半: そう．前半: テキスト付録 B-5.

質問 7： 等温座標かつ曲率線座標をもたない曲面はどのようなものですか？　**お答え：**むしろ両方の性質をもつ座標系があることの方が特別（と講義で述べた）．

質問 8： 等温座標かつ漸近線座標であるような座標にも名称があったり存在条件が調べられていたりするのでしょうか．

お答え： 等温座標系は二つの座標曲線が直交するので，もしもそういう座標系があるなら，漸近方向が直交していなければならない．ここで漸近方向が直交するならば平均曲率は 0 にならなければならない（テキスト命題 9.10）から，ご質問のパラメータが存在するための必要条件は「H が恒等的に 0 となる，すなわち極小曲面であること」.

質問 9： 曲率線座標であるパラメータが今回の問題 5-1 ではたまたま見つかったのですが，$F=M=0$ のようにパラメータをさがす手がかりはありますか．また，漸近線座標の方も $L=N=0$，$M\neq 0$ なるパラメータの手がかりはありますか． **お答え：**座標変換による基本量の変化を書いてよく考える．後半は第二基本形式の因数分解.

質問 10： 問題 5-1 において $M\neq 0$ とは平面のように漸近方向が一意に定まらないことから漸近曲線が定まらないものを省いているということですか？ **お答え：**そうです．M が恒等的に零だとすべての方向が漸近方向になります.

質問 11： 漸近方向の存在について，$\mathbb{C}^3$ 上の $\mathbb{C}^2$-曲面のようなものを考えれば主曲率によらず漸近方向が存在するのでしょうか． **お答え：**あまり考えたことはありませんが，複素解析性を仮定して，同様の定義はできますね．それが「良い」ものかどうかはよく知らないですが.

質問 12： ワインガルテン行列は基本的にタチのいい感じがしますが対角化が可能でないときとかはあるのでしょうか？対角化ができないとなると結構めんどう臭いきがします．そもそも $\widehat{I}$ が正則なのはどこで保証されているのでしょうか． **お答え：**固有値は実数，対角化可能（と講義で述べた）．実際 (1) パラメータ変換でワインガルテン行列は $A\mapsto J^{-1}AJ$ と相似な行列にうつる (2) 曲面上の点 P における接平面が xy-平面となる座標系をとり，曲面を $(x,y,f(x,y))$ とグラフ表示すると，A_{P} は f の Hesse 行列．これは対称行列なので，「ワインガルテン行列は対称行列と相似」．ゆえに A の固有値は実数で対角化可能．後半：曲面の正則性から $EG-F^2=|p_u\times p_v|^2>0$.

質問 13： 法曲率の最大値・最小値の存在性の示し方が分かりませんでした．$E\alpha^2+2F\alpha\beta+G\beta^2=1$ という条件のもとで，$L\alpha^2+2M\alpha\beta+N\beta^2$ の最大・最小を求めるというところで，$E\alpha^2+2F\alpha\beta+G\beta^2=1$ が有界閉集合だからでしょうか． **お答え：**はい，曲面の正則性から $\{(\alpha,\beta)\,;E\alpha^2+2F\alpha\beta+G\beta^2=1\}$ は $\alpha\beta$-平面上の楕円．したがってこの集合は $\mathbb{R}^2$ のコンパクト部分集合．コンパクト位相空間上の連続関数は最大・最小値をとる.

質問 14： 固有値が主曲率になることは定義よりわかるのですが，なぜ曲率と固有値が関連しているのですか.

お答え： ご質問の「曲率」で何を表しているのかわからないので回答は不能.

質問 15： 固有値，固有ベクトルの幾何学的な意味を知りたいです．（というのもワインガルテン行列の固有値を主曲率と定めた理由がよくわからないからです．） **お答え：**一般的な状況では固有値・固有ベクトルの「幾何学的意味」は多義的．括弧内の部分は (1) パラメータのとり方によらない量なので便利 (2) 法曲率の最大・最小.

質問 16： $A=\widehat{I}^{-1}\,\widehat{II}=\begin{pmatrix}A_1^1 & A_2^1\\ A_1^2 & A_2^2\end{pmatrix}$ という書き方に違和感を覚えます（∵ 累乗と感違いする可能性がある）.

お答え： 古来からの習慣（テンソル解析の記号）なので慣れてもらうのがよいです.

質問 17： 等温座標系の「等温」はどこからきているのか． **お答え：**よくわからないと述べた気がする.

質問 18： 一葉双曲面と二葉双曲面は式だと「$=1$」か「$=-1$」かの違いだそうですが，他に何らかのパラメータを用いて同一の式で表せて，そのパラメータを動かしていくと真ん中がプツンときれて一葉が二葉になるということもできますか？ **お答え：**陰関数表示 $x^2+y^2-z^2=a$ で a が正から負に変化すると考えればおっしゃる現象がおきます．一方，二葉双曲面は連結ではないので一葉双曲面と同様のパラメータ表示ができません．したがってパラメータ表示でご質問の現象を起こすのは少しむずかしいですが「上半分」だけならできます．やってみてください.

質問 19： 臍点の読み方を調べたら，さいてん，へそてん，せいてん... などでてきたのですが，どう読むのが主流ですか?

お答え： 「へそ」と「せい」はよく聞きます．自信がないときは umbilic point ということにしています.

質問 20： 全ての点が臍点であるような曲面は球面と平面以外に存在しますか． **お答え：**テキスト命題 9.6.

質問 21： 臍点以外ではその点の近くで ∃ 曲率線座標となるが，臍点の近くで常に成り立つパラメータは存在しますか？

お答え： 何が成り立つのですか？

質問 22： $\mathbb{R}^3$ を直和で分解するときに Span という言葉がでてくるのはなぜですか． **お答え：**Span の意味は大丈夫？

質問 23： ν の偏微分を幾何学的にうまくイメージできないです.

お答え： 曲線の単位法ベクトルの微分はイメージできる？

質問 24： 定義 3.15 の第一基本形式で $ds^2:=$ と始まるのですが，この s は弧長パラメータの s と同じですか.

お答え： 曲面と曲線という違った対象ですが，どういうことが成り立てば「同じ」と思えますか？ 曲面上の曲線の長さの「積分の中身」が ds，という話をしましたよね.

質問 25： 4-1 でガウス曲率 -1 で球の（原文ママ：球面の？）曲率（半径 r）が $\frac{1}{r^2}$ がにているということですか.

お答え： 「4-1 で *** ということですか.」という文の構造がわかりません．「xxx は *** ということですか.」という問であれば yes か no か回答できますが，これでは回答が不能です.

質問 26： 幾何学概論第三の授業アンケートへの回答は結局やらないのですか.

お答え： 第三はやらないです．第一は先日戻ってきたのでやってみましょう.

質問 27： よく復習しておきます． **お答え：**はい.

6 曲面論の基本定理

■測地線．

定義 6.1. 正則にパラメータ表示された曲面 $p(u,v)$ 上のパラメータづけられた曲線

$$\hat{\gamma}(t) = p \circ \gamma(t) = p\bigl(u(t), v(t)\bigr) \qquad \bigl(\gamma(t) = (u(t), v(t))\bigr)$$

が**測地線** geodesic であるとは

$$\left[\ddot{\hat{\gamma}}(t)\right]^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$$

が成り立つことである．

問 6.2. 曲面上の曲線 $\hat{\gamma}(t)$ が測地線ならば，その速さ $|\dot{\hat{\gamma}}(t)|$ は一定であることを確かめなさい．このことから，測地線の概念は曲線のパラメータのとり方に依存する．

問 6.3. 曲面 $p(u,v)$ 上の正則曲線 $\hat{\gamma}(t) = p\bigl(u(t), v(t)\bigr)$ が，パラメータを適切に取り替えると測地線になるための必要十分条件は，

$$\hat{\nu}(t) \cdot \bigl(\ddot{\hat{\gamma}}(t) \times \dot{\hat{\gamma}}(t)\bigr) = 0 \qquad \Bigl(\hat{\nu}(t) = \nu\bigl(u(t), v(t)\bigr)\Bigr)$$

となることである．このことを示しなさい．

問 6.4. 次を示しなさい．

- 平面の測地線は，弧長に比例するパラメータで表した直線である．
- 球面と，その中心を含む平面との共通部分（**大円** a great circle と呼ばれる）は，弧長に比例するパラメータで表示すると測地線になる．

■ガウス・ワインガルテンの方程式． パラメータづけられた曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトルを ν，第一，第二基本量をそれぞれ E, F, G; L, M, N とする．このとき，各点 (u,v) に対して $\{p_u, p_v, \nu\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底を与える（正規直交とは限らない）．とくに $\mathcal{F} := (p_u, p_v, \nu)$ は各 (u,v) に対して 3 次正則行列を与える．この $\mathcal{F}$ を曲面の**ガウス枠**ということにする．

命題 6.5 (ガウス・ワインガルテンの方程式)**.** 上の状況で

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} = \mathcal{F}\Omega, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} = \mathcal{F}\Lambda$$

が成り立つ．ただし

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & -A_1^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & -A_1^2 \\ L & M & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{22}^1 & -A_2^1 \\ \Gamma_{21}^2 & \Gamma_{22}^2 & -A_2^2 \\ M & N & 0 \end{pmatrix},$$

Γ_{jk}^i はクリストッフェルの記号（テキスト 108 ページ，式 (10.6)），$A = (A_j^i)$ はワインガルテン行列（テキスト 82 ページ，式 (8.4)）である．

2020 年 1 月 16 日 (2020 年 1 月 23 日訂正)

証明. テキスト 108 ページ (10.7) 式（ガウスの公式）とワインガルテンの公式（テキスト 85 ページ，命題 8.5）からすぐにわかる． □

系 6.6. 命題 6.5 の状況で，$\Omega_v - \Lambda_u - \Omega\Lambda + \Lambda\Omega = O$ が成り立つ．

証明. $\mathcal{F}$ が正則行列に値をとる関数であることと，$\mathcal{F}_{uv} = \mathcal{F}_{vu}$ から従う． □

注意 6.7. 曲面 $p(u,v)$ が与えられれば，第一基本量，第二基本量が定まる．逆に，与えられた関数 E, F, G, L, M, N に対してそれらを第一，第二基本量にもつ曲面を求めることを考えよう．命題 6.5 の Ω, Λ は第一基本量，第二基本量から定まることに注意して，与えられた E, F, G, L, M, N に対して形式的に Ω, Λ を作り，命題 6.5 の $\mathcal{F}$ に関する偏微分方程式を解けばよいだろう．このような $\mathcal{F}$ が存在するための必要条件が系 6.6 である．実は (u,v) が動く範囲が単連結領域であれば，この条件は十分条件にもなっていて，対応する曲面が存在することがわかる（曲面論の基本定理；テキスト 179 ページ，定理 16.2）．

注意 6.8. 曲面論の基本定理から，第一・第二基本形式が曲面を定めるが，「第一基本形式・ガウス曲率・平均曲率」の組では曲面が定まらないことがある．これらの量を保ちながら変形できるような曲面を Bonnet 曲面とよぶ．

問 6.9. 実数 α に対して

$$p_\alpha(r,\theta) = \left(r\cos(\theta+\alpha) + \frac{\cos(\theta-\alpha)}{r}, r\sin(\theta+\alpha) + \frac{\sin(\theta-\alpha)}{r}, 2\cos\alpha\log r - 2\theta\sin\alpha\right)$$

と定めると，p_α の第一基本量，平均曲率は α によらないことを確かめなさい．

■驚異の定理　系 6.6 から**ガウス方程式**（テキスト 123 ページの定理 11.2；驚異の定理）が得られる．これは**ガウス曲率 K を第一基本量で表す式** である．

問 6.10. ガウスの驚異の定理を用いて，正確な地図がつくれない理由を説明しなさい．

問題

6-1 曲面

$$p(u,v) = \bigl(\operatorname{sech} v\cos u, \operatorname{sech} v\sin u, v - \tanh v\bigr) \qquad (v > 0)$$

上の測地線 $\hat\gamma(t) = p\circ\gamma(t)$ $(\gamma(t) = (u(t), v(t)))$ は

$$u(t) \text{ は定数} \qquad \text{または} \qquad \bigl(u(t) - c\bigr)^2 + \cosh^2 v(t) = a^2 \qquad (a > 1, c \text{ は定数})$$

を満たすことを示しなさい．

6-2 曲面 $p(u,v)$ の第一基本形式，第二基本形式がそれぞれ

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\theta\,du\,dv + dv^2, \qquad I\!I = 2\sin\theta\,du\,dv$$

と表されているとする．ただし $\theta = \theta(u,v)$ は (u,v) のなめらかな関数で区間 $(0,\pi)$ に値をもつものとする．このとき，ガウスの方程式（テキスト 123 ページ，定理 11.2）を θ とその偏導関数の関係式として具体的に表しなさい．