2020 年 1 月 23 日

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二（MTH.B212）講義資料 7

お知らせ

- 本日が最終回となります．ご聴講ありがとうございました． / 本日の提出課題はありません．
- 授業評価にご協力お願いいたします．

前回までの訂正

- 板書で 「$\hat{\gamma}$ の法曲率 $= \left[\ddot{\hat{\gamma}}\right]^{\mathrm{N}} = \kappa_n\nu$」と書いたというご指摘がありました．$\kappa_n$ の部分が法曲率ですね．
- 一葉双曲面の第二基本形式を求める際に，$\nu = (\cosh v\cos u, \cosh v\sin u, -\sinh v)/\Delta$ （$\Delta^2 = \cosh^2 v + \sinh^2 v$）の v に関する微分をしましたが，Δ の微分を計算していませんでした．実は
$$\nu_v = (\sinh v\cos u, \sinh v, \sin u, -\cosh v)/\Delta - \nu\frac{\Delta_v}{\Delta}$$
となるので $M = -p_u \cdot \nu_v$, $N = -p_v \cdot \nu_v$ の計算には Δ の微分は影響しません．
- 問題 5-2 の解説で，$(-\cosh v\,du + dv)(\cosh v\,du + dv) = \cosh v(-du + \operatorname{sech} v\,dv)(du + \operatorname{sech} v\,dv)$ と板書したようです．右辺の係数は $\cosh^2 v$ です．
- テキスト 85 ページ，命題 8.5 の証明：0 ⇒ $\mathbf{0}$（太字）
- 講義資料 6, 4 ページ, 問題 6-1：$u(t)^2 + \cosh^2 v(t) = a^2 \qquad (a > 1$ は定数$)$ ⇒
$$u(t) \text{ は定数} \qquad \text{または} \qquad \bigl(u(t) - c\bigr)^2 + \cosh^2 v(t) = a^2 \qquad (a > 1,\ c \text{ は定数})$$
- 講義資料 6, 4 ページ, 問題 6-2：σ とその偏導関数 ⇒ θ とその偏導関数
- 講義資料 6, 3 ページ，下から 9 行目：E, F, G; L, M, N のセミコロンはコンマの間違いではないか，というご指摘がありましたが，第一基本量と第二基本量の区切りをつけるためにセミコロンにしています．

授業に関する御意見

- ガウスは驚異的な人だと思った．　**山田のコメント：** そうなのか？
- 微分方程式までは立てられましたが，2 変数の微分方程式を解いたことがなく，とききれなかった．
  山田のコメント： そうかも知れませんね．解をどこまで求めるかが問題です（問題の式は解が満たす関係式）．
- 本当は 6-1 を答えたかったのですが，課題をギリギリに初めたせいで示せませんでした．解説を聞いて理解できたらもう 1 回やってみます．　**山田のコメント：** ごめん．
- 問題が解けなかったので，しばらく考えてみます．　**山田のコメント：** ごめんなさい．
- 計算が大変でした．　**山田のコメント：** ですよね．
- α だったり a だったりわかりにくい．　**山田のコメント：** そうですか．
- 色々な問題に触れたいです．教科書の問題以外にどこかにありませんか．
  山田のコメント： 微分幾何の本は記号がいろいろで，慣れるまで大変ですが，D. J. Struik, Lectures on Classical Differential Geometry, 1950, Dover, M. P. do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces, 1976/2006, Dover, M. Lipschutz, Schaum's outlines of Differential Geometry, 1969, McGraw Hill, などは問題が沢山あります．
- テストがんばります．　**山田のコメント：** はい．

質問と回答

質問 1： u 曲線，v 曲線とは何のことですか？　**お答え：**テキスト 64 ページ．

質問 2： 講義プリントのガウス・ワインガルテンの方程式の Λ の中にでてくる Γ^1_{21} と Γ^2_{21} というのはどこに出てくるのでしょうか．自分のノートには Γ^1_{12} と Γ^2_{12} とあるのですが，これは同じなのでしょうか．

お答え： $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$ と定めます（コメントし忘れました）．テキスト 108 ページ，(10.6) 式．

質問 3： なめらかな曲面上の与えられた 2 点を通る測地線は常に存在しますか．　**お答え：**いいえ．例えば，$p\colon D := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \ni (x,y) \mapsto (x,y,0) \in \mathbb{R}^3$ とすると $p(D)$ 上の $(1,0,0)$ と $(-1,0,0)$ を結ぶ測地線は存在しません．

質問 4： 6-1 において，逆「$u(t)^2 + \cosh^2 v(t) = a^2$ $a > 1$ を満たせば $\hat{\gamma}(t)$ が測地線になるような t をとれる」も成立しそうだと思ったのですが，これは正しいですか．　**お答え：**正しいです．

質問 5： 曲面上の点と初速度を定めると測地線が一意に存在しますか．　**お答え：**はい，テキスト 110 ページ．

質問 6： 任意の曲面について，u 曲線 $p(t,v_0) = \gamma_{v_0}(t)$ のパラメータを適切に取り替えると測地線になるようなパラメータ表示 $p(u,v)$ は存在するでしょうか．　**お答え：**はい（局所的には）存在します．曲面上の正則曲線 $\sigma(v)$ に対して，その余法線ベクトル $\boldsymbol{n}_g(v)$（テキスト 106 ページ）をとり，$p(u,v) = \operatorname{Exp}_{\sigma(v)} u\boldsymbol{n}_g(v)$ とおく（この記号はテキスト 132 ページの脚注）と，(u,v) が条件を満たすパラメータになっています．

質問 7： 問 6.2 の逆，$|\dot{\hat{\gamma}}(t)|$ が一定 $\Rightarrow$ $\hat{\gamma}(t)$ が測地線，は成り立ちますか？　**お答え：**成り立ちません．もしご質問の主張が成り立つなら，すべての曲線はパラメータを弧長にとりかえると測地線になってしまいます．

質問 8： 測地線は $\left[\ddot{\hat{\gamma}}\right]^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$ であるのだから，$\left[\ddot{\hat{\gamma}}\right]^{\mathrm{N}} = \mathbf{0}$ という状況を考えるのも自然だと思ったのですが，これは接平面にのっている曲線ですか？；$\left[\ddot{\hat{\gamma}}\right]^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$ を満たす曲面上の曲線を測地線といいますが，$\left[\ddot{\hat{\gamma}}\right]^{\mathrm{N}} = \mathbf{0}$ を満たす曲線 $\gamma(t)$ に名前はありますか．また，それを考えるメリットはあるのでしょうか．

お答え： 漸近曲線です．接平面と曲面の共通部分がなす直線に接しています（テキスト 86 ページ，図 8.1 の右図参照）．

質問 9： 漸近方向が，ガウス曲率が負のときちょうど 2 個とれるというのが少し附に落ちなかった（原文ママ：腑に落ちなかった？）．3 個以上とれることはない？（あるいはせい点ならとりうる？）

お答え： 臍点ではガウス曲率は 0 以上だかｒ質問の範囲外．ガウス曲率が負であるような点では，正の主曲率に対応する主方向（ただ一つ定まる）と負の主曲率に対応する主方向の間に法曲率が 0 になる点があるわけで，丁度 2 つ．

質問 10： 漸近線座標の話なのですが，ガウス曲率 K が負になる点が複数あるとすると，どの漸近線座標をとるのかわずらわしい感じがします．あまり漸近線座標のよさがわかりません．

お答え： ガウス曲率 K は曲面上の連続関数なので，ある点 P で負の値をとると，その近傍では負の値をとります．すなわち，最初から K が負になる点は複数（非可算無限個）あるのですが，なにか誤解をしていませんか？

質問 11： 漸近線座標があるとうれしいことは何ですか．　**お答え：**たとえば問題 6-2 のような座標系がとれる．

質問 12： 幾何学に限らず，数学の演習をしている際にあたえられた関数の不定積分が初等関数でそもそも書き下せるのかがわからないときがあるのですが，判別法はあるのでしょうか．　**お答え：**一般論としてはないと思います．原始関数が初等関数になるもののリストを作っておけば，そのリストにないものは「あやしい」ことになりますが．

質問 13： 今回，$\left[\ddot{\hat{\gamma}}\right]^{\mathrm{T}} = (\ddot{\hat{\gamma}} \cdot p_u)p_u + (\ddot{\hat{\gamma}} \cdot p_v)p_v$ が成り立つのは $\{p_u, p_v\}$ が正規直交系をなしている必要があると説明していただけましたが，上記の式が成り立つことと $\{p_u, p_v\}$ が正規直交系をなすことは同値ですか？

お答え： 同値です．簡単なので示してみましょう．

質問 14： 擬球面は球の $K = 1$ に対して $K = -1$ だからこの名前になったということらしいですが，このように「擬〇〇」と名付けられたものは他にもあるのでしょうか．あるとしたら，似た性質を持っているからというだけで何でも「擬」をつけるとしてもその名前にしたいものが何種類も出てきてしまう気が」するのですが，そんなことはないのでしょうか．　**お答え：**例えば「擬ユークリッド空間」．“pseudo” の訳語．もちろん「〇」に対して「擬〇」という対応が定義されているわけではないので，「擬〇」は「〇」とは別に定義しなければなりません．

質問 15： $|\dot{\hat{\gamma}}(t)|$ が一定だから，測地線はパラメータのとり方によるというのがよくわかりません．

お答え： 測地線のパラメータを速さ一定でないものに変換すると，その曲線のパラメータ表示は測地線を与えない．

質問 16： E, F, G, L, M, N について，これらは全て任意にとれず可微分条件（原文ママ：可積分条件）を満たすことが必要とありましたが，この 6 つの量のうち，いくつかを任意に定めてその後その条件を満たすように他の量を求めることはできるのでしょうか．　**お答え：**条件は 3 本なので，3 つを決めると残りが決まりそうです．大雑把にいうと，第一基本形式を与えれば，L, M, N を（関数分の自由度で）決まります．例えば Janet-Cartan の定理．

質問 17： 問 6.10 の “正確な地図” は何をさすのですか？　**お答え：**ちゃんと説明してなかった．テキスト 78 ページ．

質問 18： 正確な地図とは，角度と長さの比（縮尺？）を保つということですか？　**お答え：**はい．

質問 19： なぜ Gauss 枠でも $\mathcal{F}$ を使うのですか？ガウスさんちょっとかわいそう．

お答え： Frame の F です．Frenet 枠の $\mathcal{F}$ も frame のつもり．

質問 20： 三葉双曲面や四葉双曲面などの名前のついた曲面は存在しますか．　**お答え：**いいえ．「双曲面」って何？

質問 21： 変分法を適用できる条件は何ですか．　**お答え：**文脈がわかりません．

質問 22： $1 + \sinh^2 v = \cosh^2 v$ ですね．すみません．　**お答え：**いいえ．