2020 年 1 月 30 日 10 時 45 分 ∼12 時 15 分; (2020.01.31. Ver 2.)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二 定期試験 〔問題 1〕

注意事項
- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読みとり, 理解できるように書いてください.
- 計算や下書きには余白・裏面を使用してください（採点の対象ではない）.
- 試験終了後は，**解答用紙**，**持込用紙**を回収します．問題は持ち帰っていただいて結構です.
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません. 問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し, 正しいと思われる問題に直して解答してください.

指定用紙のみ持込可

問題 A [100 点] 次の文中の $\boxed{1}$～$\boxed{32}$ に最もよく充てはまる数・式を入れなさい[1].

座標平面 $\mathbb{R}^2$ 上の領域 $D_0 := \{(u,v)\,|\,|u|<\pi\}$ 上で定義された写像

$$p\colon D_0 \ni (u,v) \longmapsto p(u,v) = (\operatorname{sech} v\cos u, \operatorname{sech} v\sin u, v-\tanh v) \in \mathbb{R}^3$$

は D_0 から $\mathbb{R}^3$ への C^∞-級の単射を与える．このとき，p が曲面の正則なパラメータ表示を与える D_0 の部分領域 D で，点 $(0,1)$ を含む最大のものは $D = \{(u,v)\in D_0\,|\,\boxed{1}\}$ である.

以下，p は領域 D 上で定義されているものと考える.

このとき p の第一基本形式は $ds^2 = \boxed{2}$ とかける．とくに，$\varepsilon\in(0,\pi)$, $\delta\in(0,1)$, $M\in(1,\infty)$ に対して

$$\overline{D}_{\varepsilon,\delta,M} := \{(u,v)\in D\,;\,|u|\leqq \pi-\varepsilon, \delta<v<M\}$$

とおき，$S_{\varepsilon,\delta,M}$ を $\overline{D}_{\varepsilon,\delta,M}$ に対応する曲面上の部分の面積とすると，その極限値は

$$S_{\varepsilon,\delta,M} \to \boxed{3} \qquad (\varepsilon\to+0,\ \delta\to+0,\ M\to+\infty)$$

となる.

いま，定数 $a>1$, $c>0$ に対して，座標平面 D 上の曲線

$$(\star)\ \ C_1 := \{(u,v)\in D\,|\,u^2+\cosh^2 v = a^2\},\quad C_2 := \{(u,v)\in\ |\,(u-c)^2+\cosh^2 v = a^2+c^2\}$$

を考えると，これらはともに (u,v) 平面上の点 $(u_0,v_0) := (0,\boxed{4})$ を通る．この点の p による像を $\mathrm{P} := p(u_0,v_0)$，C_1，C_2 に対応する曲面上の曲線を $\hat{C}_1$, $\hat{C}_2$ とすると，2 つの曲線 $\hat{C}_1$，$\hat{C}_2$ が点 P でなす角は $\boxed{5}$ である.

ここで $\nu = \boxed{6}$ とおくと，ν は p の単位法線ベクトル場を与える．これを用いると p の第二基本形式は $I\!I = \boxed{7}$ と表される．とくに p の主曲率は $\boxed{8}$，ガウス曲率 K は $\boxed{9}$，平均曲率 H は $\boxed{10}$ となる.

裏面に続く

[1] 空欄に入れる式は，一般的な定義式ではなく，(u,v), a などの具体的な式である.

領域 D 上の各点 (u,v) で $\{p_u(u,v), p_v(u,v), \nu(u,v)\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底を与えるので，p_{uu}, p_{uv}, p_{vv}, ν_u, ν_v は p_u, p_v, ν の線型結合で表される．実際，これらは (u,v) の具体的な関数 $\boxed{11}$–$\boxed{25}$ を用いて

$$\begin{aligned} p_{uu} &= \boxed{11}\,p_u + \boxed{12}\,p_v + \boxed{13}\,\nu, \\ p_{uv} &= \boxed{14}\,p_u + \boxed{15}\,p_v + \boxed{16}\,\nu, \\ p_{vv} &= \boxed{17}\,p_u + \boxed{18}\,p_v + \boxed{19}\,\nu, \\ \nu_u &= \boxed{20}\,p_u + \boxed{21}\,p_v + \boxed{22}\,\nu, \\ \nu_v &= \boxed{23}\,p_u + \boxed{24}\,p_v + \boxed{25}\,\nu \end{aligned}$$

と表される．

ここで $(u(t),v(t))$ を D 上の正則曲線のパラメータ表示，$\hat{\gamma}(t) := p\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ とすると，その加速度ベクトルは $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\ddot{u}$, $\ddot{v}$ と (u,v) の関数を用いて

$$\ddot{\hat{\gamma}} = \boxed{26}\,p_u + \boxed{27}\,p_v + \boxed{28}\,\nu$$

と表すことができる．

とくに $(u(t),v(t))$ が $(\star)$ 式で定義された曲線 C_1 のパラメータ表示で $(u(0),v(0)) = (u_0,v_0)$ となるもの，$\hat{\gamma}(t) := p\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ とすると，$t=0$ における $\hat{\gamma}(t)$ の法曲率は $\boxed{29}$，測地的曲率の絶対値は $\boxed{30}$[2] となる．

正の定数 b に対して

$$u := \xi - b\eta, \qquad v = \xi + b\eta$$

とすると (ξ,η) は曲面 $p(u,v)$ の新しいパラメータを与える．とくに，(ξ,η) がこの曲面の漸近線座標系となるのは $b = \boxed{31}$ のときで，このとき，第一基本形式は ds^2 と第二基本形式 II は

$$ds^2 = d\xi^2 + 2\cos\theta d\xi\, d\eta + d\eta^2, \qquad II = 2\sin\theta\, d\xi\, d\eta$$

という形にかける．ただし θ は (ξ,η) の具体的な式で $\theta = \boxed{32}$ と書ける．

問題 B 「地球の正確な地図を描くことはできない」ということの理由を,「ガウス曲率」という言葉を用いて説明しなさい． [10 点]

問題 C [0 点] 何か言い残すことがありましたらお書きください．何を書いても怒りません．

おつかれさまでした ♡

[2]測地的曲率の絶対値は，弧長パラメータで表された曲面上の曲線の加速度ベクトルの接成分の大きさ．

幾何学概論第二 定期試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄 各 5 点; 11–13, 14–16, 17–19, 20–22, 23–25, 26–28 は各組 5 点

1 $v > 0$	2 $\operatorname{sech}^2 v\, du^2 + \tanh^2 v\, dv^2$	3 2π
4 $\cosh^{-1} a = \log(a + \sqrt{a^2 - 1})$	5 $\cos^{-1} \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}$	
6 $(\tanh v \cos u, \tanh v \sin u, \operatorname{sech} v)$	7 $-\operatorname{sech} v \tanh v(du^2 - dv^2)$	
8 $-\sinh v, \quad \operatorname{cosech} v$	9 -1	10 $\dfrac{1}{2}(\operatorname{cosech} v - \sinh v)$
11 0	12 $\operatorname{sech} v \operatorname{cosech} v$	13 $-\operatorname{sech} v \tanh v$
14 $-\tanh v$	15 0	16 0
17 0	18 $\operatorname{sech} v \operatorname{cosech} v$	19 $\operatorname{sech} v \tanh v$
20 $\sinh v$	21 0	22 0
23 0	24 $-\operatorname{cosech} v$	25 0

学籍番号									氏名	

幾何学概論第二 定期試験 〔解答用紙 2〕

問題 A の解答欄（つづき）

26	$\ddot{u} - 2\tanh v\dot{u}\dot{v}$
27	$\ddot{v} + \operatorname{sech} v\, \mathrm{cosechv}(\dot{u}^2 + \dot{v}^2)$
28	$-\operatorname{sech} v \tanh v(\dot{u}^2 - \dot{v}^2)$

29	30	31	32
$\sqrt{a^2-1}$	0	1	$4\tan^{-1} e^{-\xi-\eta}$

計算スペース

- 1: 「領域」は連結開集合．したがって “$v \neq 0$” は不正解.
- それ以前の計算結果が正しいと仮定してえられた答は原則として正解としているのでチェックしてみてください.
- 32: 同等なものは正解.

学籍番号									氏名	

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二 定期試験 〔解答用紙 3〕

問題 B の解答欄

地球を球面 S とする．正確な地図とは，uv-平面の領域から球面 S への写像 p，すなわち S の助変数表示で，S 上の曲線と対応する平面上の曲線の長さが一致するものとする．このとき $p(u,v)$ の第一基本量は平面の第一基本量は一致しなければならない．ここでガウスの驚異の定理より，ガウス曲率は第一基本量から定まるから，平面と球面のガウス曲率は一致しなければならない．一方，平面のガウス曲率，球面のガウス曲率はそれぞれ 0，正の定数だから，このような p は存在しない．

計算スペース

問題 B:

- 「驚異の定理より球面のガウス曲率は正」は不正解．球面のガウス曲率は驚異の定理を用いずに計算できる．
- 「ガウス曲率がパラメータのとり方によらないから」は不正解．平均曲率はパラメータのとり方によらないが，零でない平均曲率をもつ曲面で 2 点間の距離を変えずに平面に変形できるものがある（柱面を想像せよ）．
- 「ガウス曲率が違うから」は理由の説明になっていない．

学籍番号									氏名	

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二 定期試験 〔解答用紙 4〕

問題 C [0 点] 言い残すことがありましたらお書きください.

回答欄

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面に座席表があります．ご自分の学籍番号の座席に着席してください.

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します: 受験者が着席していること; 各受験者が，筆記用具・持ち込み用紙・必需品（ハンカチ・ティシューペーパーなど；電話などは不可）以外の持ち物を鞄に入れ，机の下か足元に置いていること; 私語がないこと.

問題用紙・解答用紙： 問題用紙は 1 枚両面，解答用紙は 4 枚（この紙を含む）です.

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください.
- 解答用紙 3 枚 (この紙を含む) と持ち込み用紙はすべて提出してください．持ち込み用紙を持参しなかった方は提出しなくて結構ですが，解答用紙が **4 枚揃っていない答案は採点いたしません**.
- 問題用紙は提出せず，お持ち帰りください.

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります.

- 終了の合図で，筆記用具をおいてください; 答案回収終了まで席をたたないで下さい．私語は禁止.
- 答案を氏名欄の面を表にして上から，解答用紙 1·2·3·4，持込用紙の順に重ねて下さい.
- 答案を教室の黒板に向かって最右端の壁際から左，最左端の壁際まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい.
- 教室最左端の席の方は，答案用紙の束を机の上おき，回収を待ってください．試験監督が回収を行い終了です.

答案返却：

- 答案は遅くとも **2 月 6 日**には**数学事務室（本館 3 階 332B)** にて返却いたします.
- 採点に関する疑問・クレイムなどは **2020 年 2 月 14 日**までに山田まで**電子メイル**にてお申し出ください．上記期日以降は，たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません．ご了承下さい．また，返却答案を受け取らない方はクレイムをつける権利がありません.

公式集：記号は講義で用いたものとする.

(双曲線関数)

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$
$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \qquad \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x}, \qquad \coth x = \frac{1}{\tanh x}.$$

(クリストッフェル記号)

$$\Gamma_{11}^1 := \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, \qquad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 := \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, \qquad \Gamma_{22}^1 := \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)},$$
$$\Gamma_{11}^2 := \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}, \qquad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 := \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, \qquad \Gamma_{22}^2 := \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}$$

(驚異の定理)

$$\begin{aligned} K = &\frac{E\bigl(E_vG_v - 2F_uG_v + {G_u}^2\bigr)}{4(EG - F^2)^2} + \frac{F(E_uG_v - E_vG_u - 2E_vF_v - 2F_uG_u + 4F_uF_v)}{4(EG - F^2)^2} \\ &+ \frac{G\bigl(E_uG_u - 2E_uF_v + {E_v}^2\bigr)}{4(EG - F^2)^2} - \frac{E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}}{2(EG - F^2)} \end{aligned}$$

学籍番号									氏名	