幾何学概論第一 (MTH.B211)

0: ユークリッド空間

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2010/10/01

目標

定理

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の等長変換は

$$\varphi\colon \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \longmapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \qquad A \in \mathrm{O}(n), \quad \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$$

の形に表される.

定義

1. ユークリッド空間：$\mathbb{R}^n$ に標準的な内積 "·" を与えたもの.
2. 大きさ：$v \in \mathbb{R}^n$ に対して $|v| = \sqrt{v \cdot v}$.
3. 角度：$v, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して

   Schwarz

   ~~Schwartz~~

   $-1 \leq \ \leq 1$

$$\angle(v, w) := \cos^{-1} \frac{v \cdot w}{|v||w|}$$

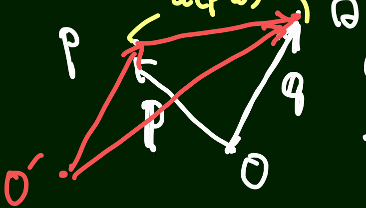
$v \cdot w = {}^t v w = (v_1 \cdots v_n)\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$

4. 2 点 P, Q $\in \mathbb{R}^n$ に対して $d(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$.

注：

$\boxed{\text{アファイン空間}}$

- $v \cdot w = {}^t v w$.
- $(\mathbb{R}^n, d)$ は距離空間.



$q - p = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$

直交行列

定義

実数を成分とする n 次正方行列が直交行列であるとは

$${}^tAA = A{}^tA = I \qquad (I \text{ は } n \text{ 次単位行列})$$

$$\Leftrightarrow \boxed{{}^tAA = I}$$

$$AB = I \Rightarrow BA = I$$

- 直交行列 ⇔ 内積を保つ線形変換：$(A\boldsymbol{v})\cdot(A\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$
- 直交行列 ⇔ 大きさを保つ線形変換：$|A\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{v}|$
- $(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n)$ が直交行列 ⇔ $\{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ が $\mathbb{R}^n$ の正規直交系

$${}^tAA = \begin{pmatrix} {}^ta_1 \\ \vdots \\ {}^ta_n \end{pmatrix}(a_1 \cdots a_n)$$

$$Ax\cdot Ay = {}^tx\underbrace{({}^tAA)}_{I}y = {}^tx\,y = x\cdot y$$

$$x\cdot y = \frac{1}{4}\{|x+y|^2 - |x-y|^2\}$$

逆

直交群

命題

直交行列の行列式は 1 または -1 である。

$$\det({}^tAA) = \det I$$
$$(\det {}^tA)(\det A) = 1$$
$$(\det A)^2 = 1$$

orthogonal

$\mathrm{O}(n) := \{n$ 次直交行列$\}$ 　　直交群

$\mathrm{SO}(n) := \{A \in \mathrm{O}(n)\,;\, \underline{\det A = 1}\}$ $\ni I$ 　　特殊直交群

special

- $\mathrm{O}(n)$ は行列の積に関して群をなす.
  - $A, B \in \mathrm{O}(n) \Rightarrow AB \in \mathrm{O}(n)$ （結合則 $(AB)C = A(BC)$）.
  - $I \in \mathrm{O}(n)$
  - $A \in \mathrm{O}(n) \Rightarrow A^{-1} \in \mathrm{O}(n)$.
- $\mathrm{SO}(n)$ は行列の積に関して群をなす（$\mathrm{O}(n)$ の部分群）

2次直交行列

命題

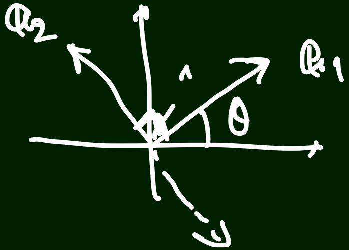
$\det = 1$

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} ; \theta \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathrm{O}(2) = \mathrm{SO}(2) \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} ; \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

$\det = -1$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$



回転

$e^{i\theta}$

$\in SO(2)$

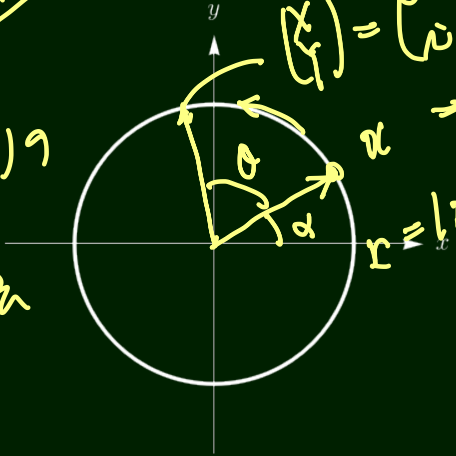
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}$$

原点まわりの角θの回転

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\theta) \\ \sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} \to \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$r = |\boldsymbol{x}|$



折返し

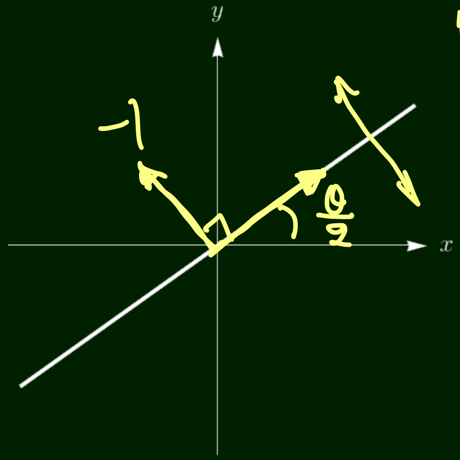
$\in O(2) \setminus SO(2)$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

± 1

1-固有ベクトル

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$



3 次直交行列

問題

$A \in \mathrm{SO}(3)$ ならば，ある $P \in \mathrm{SO}(3)$ が存在して

$$
{}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.
$$

- A の固有値の一つは 1．その単位固有ベクトルを $\boldsymbol{a}_1$ とする．
- $\boldsymbol{a}_1$ に直交する単位ベクトル $\boldsymbol{a}_2$ をひとつとる．
- $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$（ベクトル積）とする．
- $P = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ とおく．

等長変換

定義

写像 $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が等長変換であるとは

$$\underline{d\bigl(\varphi(\mathrm{P}), \varphi(\mathrm{Q})\bigr) = d(\mathrm{P}, \mathrm{Q})} \qquad (\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}^n)$$

が成り立つこと.

- $\mathbb{R}^n$ の等長変換全体は写像の合成に関して群をなす.

補題

直交行列 $A \in \mathrm{O}(n)$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ に対して写像

$$\varphi_{A,\boldsymbol{a}}\colon \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \varphi_{A,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = \underline{\boxed{A\boldsymbol{x}} + \cancel{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^n}$$

は等長変換.

それはでも?

等長変換の決定

定理

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の等長変換は

$$\varphi\colon \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \longmapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \qquad A \in \mathrm{O}(n), \quad \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$$

の形に表される.

- $\psi = \varphi - \varphi(0)$　　$\psi(0) = 0$
- ψ: 等長
- $|\psi(x)| = |x|$　　$\psi(x)\cdot\psi(x) = x\cdot x$
- ★ ψ: 線型　　$|\psi(x+y) - \psi(x) - \psi(y)|^2 = 0$
- ∴ $\psi(x) = Ax$

合同変換

$\mathbb{R}^n$ の等長変換を合同変換ということもある．等長変換
$\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$ $(A \in \mathrm{O}(n),\ \ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n)$ が

- 向きを保つ合同変換 $\Leftrightarrow$ $\boxed{A \in \mathrm{SO}(n).}$
- 向きを反転する合同変換 $\Leftrightarrow$ $\boxed{A \in \mathrm{O}(n) \setminus \mathrm{SO}(n).}$

$\boxed{n=2,\ n=3}$