幾何学概論第一 (MTH.B211)

0: ユークリッド空間

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2020/10/01(2020/10/02 訂正)

目標

定理
ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の等長変換は

$$\varphi\colon \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \longmapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \qquad A \in \mathrm{O}(n), \quad \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$$

の形に表される．

ユークリッド空間

定義
1. ユークリッド空間：$\mathbb{R}^n$ に標準的な内積 "$\cdot$" を与えたもの．
2. 大きさ：$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}$.
3. 角度：$\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対して

$$\angle(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) := \cos^{-1}\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{v}|\,|\boldsymbol{w}|}$$

4. 2 点 P, $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}^n$ に対して $d(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$．

注：
- $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = {}^t\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}$.
- $(\mathbb{R}^n, d)$ は距離空間．

直交行列

定義
実数を成分とする n 次正方行列が直交行列であるとは

$${}^tAA = A\,{}^tA = I \qquad (I \text{ は } n \text{ 次単位行列})$$

- 直交行列 ⇔ 内積を保つ線形変換：$(A\boldsymbol{v})\cdot(A\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$
- 直交行列 ⇔ 大きさを保つ線形変換：$|A\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{v}|$
- $(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n)$ が直交行列 ⇔ $\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n\}$ が $\mathbb{R}^n$ の正規直交系

直交群

命題
直交行列の行列式は 1 または -1 である．

$$\mathrm{O}(n) := \{n \text{ 次直交行列 }\} \qquad \text{直交群}$$
$$\mathrm{SO}(n) := \{A \in \mathrm{O}(n)\,;\, \det A = 1\} \qquad \text{特殊直交群}$$

- $\mathrm{O}(n)$ は行列の積に関して群をなす．
  - A, $B \in \mathrm{O}(n) \Rightarrow AB \in \mathrm{O}(n)$ （結合則 $(AB)C = A(BC)$）．
  - $I \in \mathrm{O}(n)$
  - $A \in \mathrm{O}(n) \Rightarrow A^{-1} \in \mathrm{O}(n)$．
- $\mathrm{SO}(n)$ は行列の積に関して群をなす（$\mathrm{O}(n)$ の部分群）

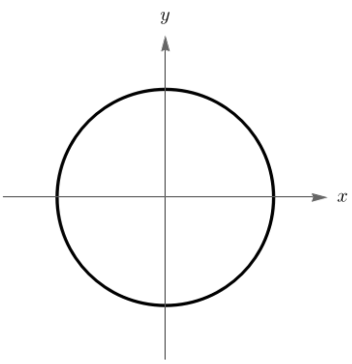
2 次直交行列

命題

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\,;\,\theta\in\mathbb{R}\right\},$$
$$\mathrm{O}(2) = \mathrm{SO}(2) \cup \left\{\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\,;\,\theta\in\mathbb{R}\right\}$$

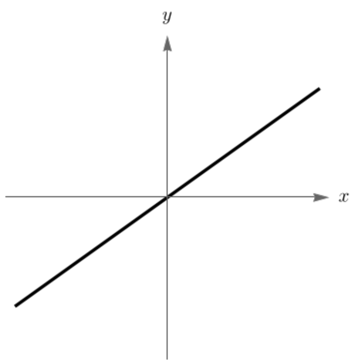
回転

$$\begin{pmatrix}X \\ Y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}$$



折返し

$$\begin{pmatrix}X \\ Y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}$$



3 次直交行列

問題

$A \in \mathrm{SO}(3)$ ならば，ある $P \in \mathrm{SO}(3)$ が存在して

$$ {}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. $$

- A の固有値の一つは 1．その単位固有ベクトルを a_1 とする．
- a_1 に直交する単位ベクトル a_2 をひとつとる．
- $a_3 = a_1 \times a_2$（ベクトル積）とする．
- $P = (a_1, a_2, a_3)$ とおく．

等長変換

定義

写像 $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が等長変換であるとは

$$ d\big(\varphi(\mathrm{P}), \varphi(\mathrm{Q})\big) = d(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \qquad (\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}^n) $$

が成り立つこと．

- $\mathbb{R}^n$ の等長変換全体は写像の合成に関して群をなす．

補題

直交行列 $A \in \mathrm{O}(n)$，$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ に対して写像

$$ \varphi_{A,\boldsymbol{a}}\colon \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \varphi_{A,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n $$

は等長変換．

等長変換の決定

定理

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の等長変換は

$$ \varphi\colon \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \longmapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \qquad A \in \mathrm{O}(n), \quad \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n $$

の形に表される．

合同変換

$\mathbb{R}^n$ の等長変換を合同変換ということもある．等長変換 $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$ $(A \in \mathrm{O}(n)$，$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n)$ が

- 向きを保つ合同変換 $\Leftrightarrow A \in \mathrm{SO}(n)$.
- 向きを反転する合同変換 $\Leftrightarrow A \in \mathrm{O}(n) \setminus \mathrm{SO}(n)$.