幾何学概論第一 (MTH.B211)

0: ユークリッド空間

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2020/10/01(2020/10/02 **訂正**)

目標

定理

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の等長変換は

$$\varphi\colon \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \longmapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \qquad A \in \mathrm{O}(n), \quad \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$$

の形に表される．

ユークリッド空間

定義

1. **ユークリッド空間：**$\mathbb{R}^n$ **に標準的な内積 "·" を与えたもの．**
2. **大きさ：**$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ **に対して** $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}$.
3. **角度：**$\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ **に対して**

$$\angle(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := \cos^{-1} \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{v}|\,|\boldsymbol{w}|}$$

4. 2 **点** P, $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}^n$ **に対して** $d(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$**．**

注：

- $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = {}^t\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}$.
- $(\mathbb{R}^n, d)$ **は距離空間．**

直交行列

定義

実数を成分とする n 次正方行列が直交行列であるとは

$$ {}^tAA = A{}^tA = I \qquad (I \text{ は } n \text{ 次単位行列}) $$

- **直交行列** $\Leftrightarrow$ **内積を保つ線形変換：**$(A\boldsymbol{v}) \cdot (A\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$
- **直交行列** $\Leftrightarrow$ **大きさを保つ線形変換：**$|A\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{v}|$
- $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ **が直交行列** $\Leftrightarrow$ $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ **が** $\mathbb{R}^n$ **の正規直交系**

直交群

命題

直交行列の行列式は 1 または -1 である．

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) &:= \{n \text{ 次直交行列}\} && \text{直交群} \\ \mathrm{SO}(n) &:= \{A \in \mathrm{O}(n)\,;\, \det A = 1\} && \text{特殊直交群} \end{aligned}$$

- $\mathrm{O}(n)$ は行列の積に関して群をなす．
  - $A, B \in \mathrm{O}(n) \Rightarrow AB \in \mathrm{O}(n)$ （結合則 $(AB)C = A(BC)$）．
  - $I \in \mathrm{O}(n)$
  - $A \in \mathrm{O}(n) \Rightarrow A^{-1} \in \mathrm{O}(n)$．
- $\mathrm{SO}(n)$ は行列の積に関して群をなす（$\mathrm{O}(n)$ の部分群）

2 次直交行列

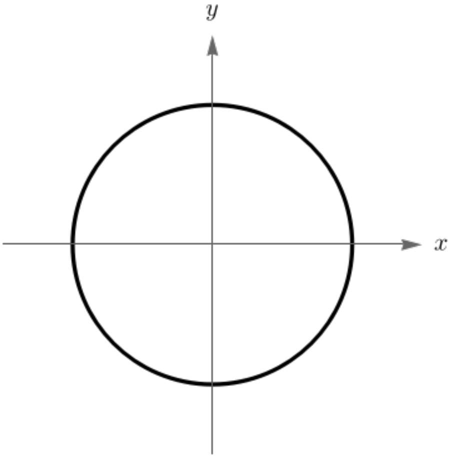
命題

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \;;\; \theta \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathrm{O}(2) = \mathrm{SO}(2) \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \;;\; \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

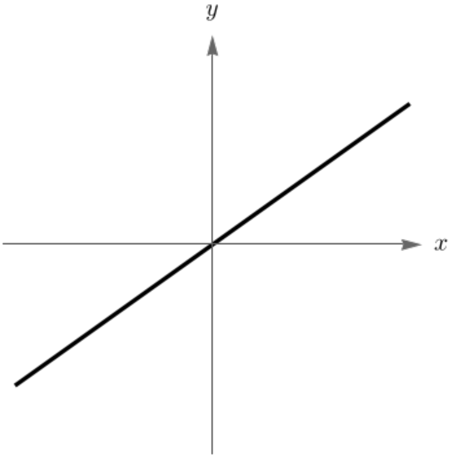
回転

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



折返し

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



3 次直交行列

問題

$A \in \mathrm{SO}(3)$ ならば，ある $P \in \mathrm{SO}(3)$ が存在して

$$ {}^t PAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. $$

- A の固有値の一つは 1．その単位固有ベクトルを a_1 とする．
- a_1 に直交する単位ベクトル a_2 をひとつとる．
- $a_3 = a_1 \times a_2$（ベクトル積）とする．
- $P = (a_1, a_2, a_3)$ とおく．

等長変換

定義

写像 $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ **が等長変換であるとは**

$$d\bigl(\varphi(\mathrm{P}), \varphi(\mathrm{Q})\bigr) = d(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \qquad (\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}^n)$$

が成り立つこと．

- $\mathbb{R}^n$ **の等長変換全体は写像の合成に関して群をなす．**

補題

直交行列 $A \in \mathrm{O}(n)$**，**$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ **に対して写像**

$$\varphi_{A,\boldsymbol{a}}\colon \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \varphi_{A,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$$

は等長変換．

等長変換の決定

定理

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の等長変換は

$$\varphi\colon \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \longmapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \qquad A \in \mathrm{O}(n), \quad \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$$

の形に表される．

合同変換

$\mathbb{R}^n$ の等長変換を合同変換ということもある．等長変換
$\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$ $(A \in \mathrm{O}(n)$，$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n)$ が

- 向きを保つ合同変換 $\Leftrightarrow A \in \mathrm{SO}(n)$.
- 向きを反転する合同変換 $\Leftrightarrow A \in \mathrm{O}(n) \setminus \mathrm{SO}(n)$.