幾何学概論第一 (MTH.B211)

1: 平面曲線の基本定理

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2010/10/01

目標

定理 (平面曲線の基本定理（テキスト 22 ページ，定理 2.8）)

区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上で定義された C^∞-級関数 $\kappa\colon I \ni s \mapsto \kappa(s) \in \mathbb{R}$ に対して，弧長によりパラメータづけられた平面曲線 $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ で，曲率関数が $\kappa(s)$ となるものが存在する．さらに，そのような曲線は $\mathbb{R}^2$ の回転と平行移動で移り合うものを除き唯一である．

- 回転と平行移動：$\mathbb{R}^2$ の向きを保つ合同変換．

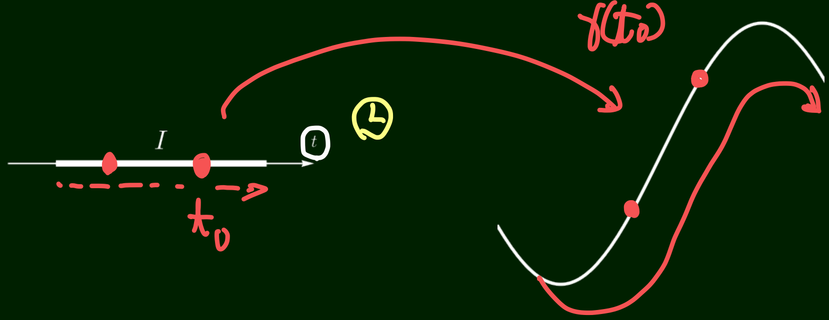
何が曲線をきめるか？

κ

平面曲線のパラメータ表示

- 平面曲線のパラメータ表示：区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上で定義された C^∞-級写像

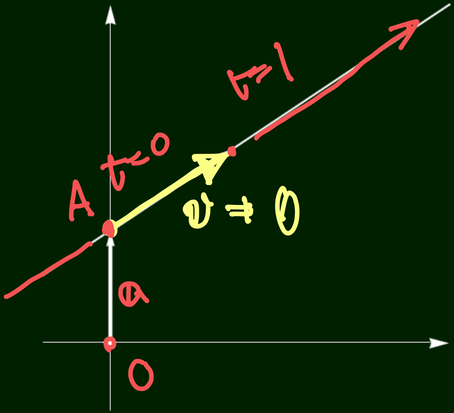
$$\gamma\colon \mathbb{R} \supset I \ni t \xmapsto{C^\infty} \gamma(t) = \bigl(x(t), y(t)\bigr) \in \mathbb{R}^2.$$



例：直線

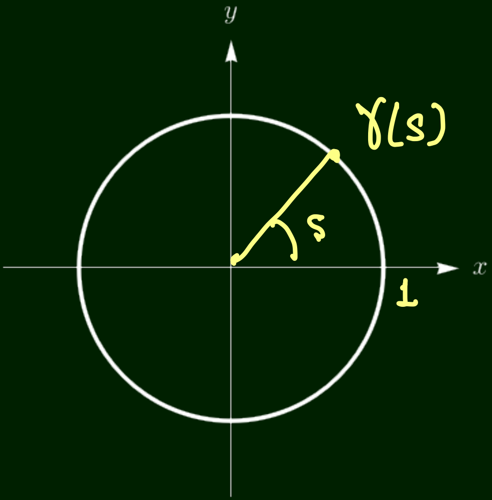
$$\gamma(t) = t\boldsymbol{v} + \boldsymbol{a} \qquad (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{0}\},\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2)$$

直線



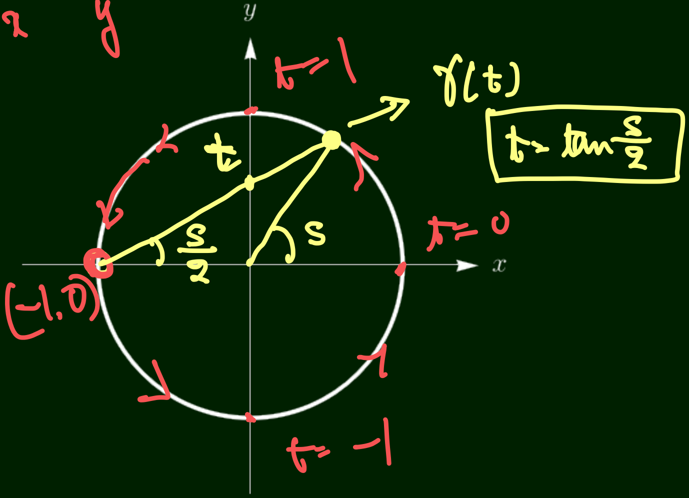
例：円

$$\gamma(s) = (\cos s, \sin s)$$



例：円（射影直線）?

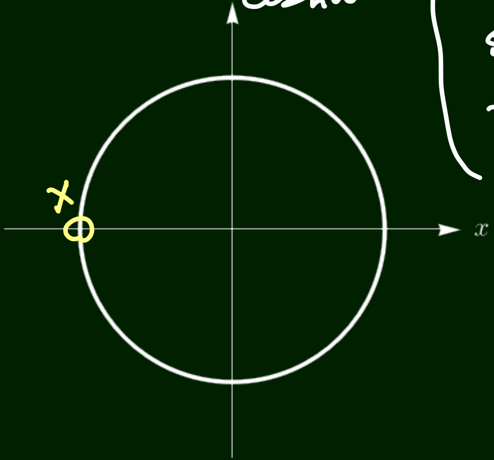
$$\gamma(t) = \underbrace{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)}_{x \quad y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad x^2+y^2=1$$



例：円

$$\gamma(t) = (\operatorname{sech} u, \tanh u)$$

$\operatorname{sech} u = \dfrac{1}{\cosh u}$



双曲線関数

$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$

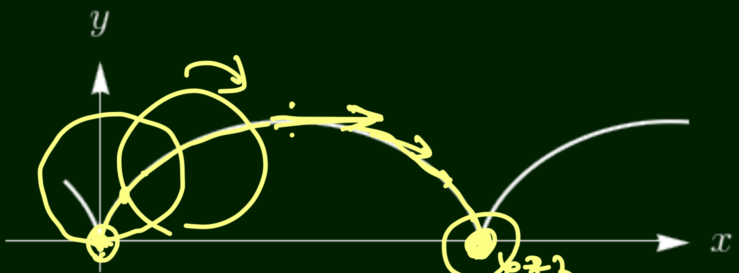
$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(双曲線の表示)

$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$

例：サイクロイド

$$\gamma(t) = \underline{(t - \sin t, 1 - \cos t)} \qquad C^\infty$$



とがる

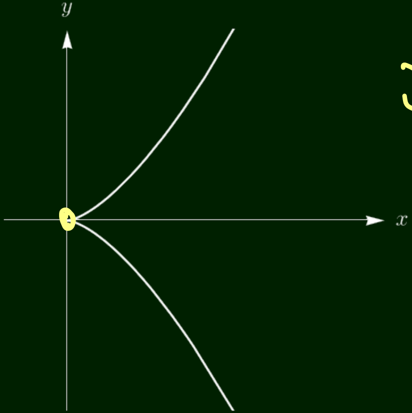
$\dot{} = \frac{d}{dt}$

$\dot\gamma(t) = (1 - \cos t, \sin t)$

$t \in 2\pi\mathbb{Z}$ のとき $\dot\gamma = 0$

例：カスプ

$\gamma(t) = (t^2, t^3)$



$\dot{\gamma}(0) = 0$

正則にパラメータ付けられた平面曲線

定義

パラメータ付けられた平面曲線 $\gamma(t)$ が $t = t_0$ で正則であるとは

$$\dot{\gamma}(t_0) \neq \mathbf{0} \qquad \cdot = \frac{d}{dt}$$

を満たすことである.
とくに $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ が正則にパラメータづけられた曲線であるとは, γ が I の各点で正則となることである.

- 正則でない点をパラメータ表示の特異点という.
- 正則な点の近くでは曲線は「なめらか」である
- なめらかな図形でも, 正則でないパラメータ表示ができる.
  例 : $\gamma(t) = (t^3, 0)$

$\dot{\gamma}(0) = 0$

直線

弧長パラメータ

定義

パラメータ付けられた平面曲線 $\gamma(s)$ が弧長によりパラメータづけられているとは

$$|\gamma'(s)| = 1 \qquad \left({}' = \frac{d}{ds}\right)$$

速さ1

が恒等的に成り立つことである.

- 弧長によるパラメータづけられているならば，正則にパラメータ表示されている.
- 正則にパラメータ表示される曲線は，弧長パラメータに変換することができる（次回）
- 「弧長」の語の意味は次回.
- 例：$\gamma(s) = (\cos s, \sin s)$

$\gamma'(s) = (-\sin s, \cos s)$

曲率関数

κ Kyokuritsu

定義

die Krümmung

正則にパラメータ付けられた曲線 $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ の曲率（曲率関数）とは

2×2

$$\kappa(t) := \frac{\det(\dot\gamma(t), \ddot\gamma(t))}{|\dot\gamma(t)|^3} \qquad \left(\dot{} = \frac{d}{dt}\right)$$

テキストの定義とちがう

で与えられる関数のことである．ただし右辺の分子は 2 つの列ベクトル $\dot\gamma$, $\ddot\gamma$ が成す 2×2 行列の行列式を表す．
弧長によりパラメータづけられた曲線 $\gamma(s)$ の曲率は

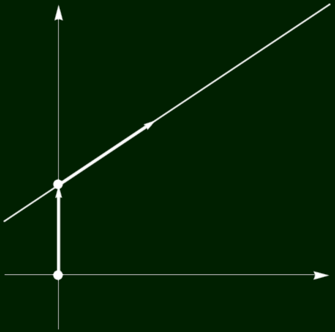
$$\boxed{\kappa(s) = \det(\gamma'(s), \gamma''(s))} \qquad \left({}' = \frac{d}{ds}\right)$$

$|\gamma'| = 1$

である．

直線

$$\gamma(t) = t\boldsymbol{v} + \boldsymbol{a} \qquad (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{0}\},\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2)$$



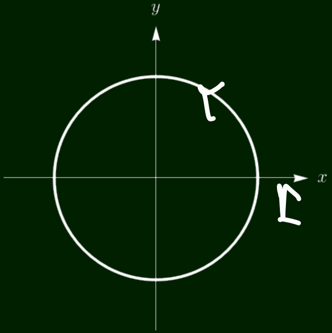
$$\gamma''(t) = 0$$

$$\det(\gamma'\ \gamma'') = 0$$

$$\kappa(t) = 0$$

例：円

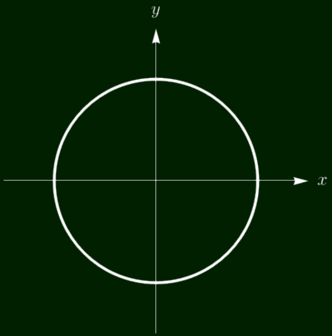
$$\gamma(s) = r(\cos s, \sin s) \qquad (r > 0)$$



$$\kappa(s) = \frac{1}{r}$$

円 2

$$\gamma(u) = r(\operatorname{sech} u, \tanh u) \qquad (r > 0)$$



Exercise

$$\kappa(u) = \frac{1}{r}$$

曲率の合同変換による不変性

定理

曲率は $\mathbb{R}^2$ の回転と平行移動で不変である.

言い換えれば,

命題

正則にパラメータづけられた平面曲線 $\gamma(t)$ の曲率関数を $\kappa(t)$ とする.
もうひとつの曲線 $\tilde{\gamma}$ を

$$\tilde{\gamma}(t) := A\gamma(t) + \boldsymbol{a} \qquad (A \in \mathrm{SO}(2),\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2)$$

で定めると $\tilde{\gamma}$ の曲率関数も κ である.

曲率の合同変換による不変性

命題

正則曲線 $\gamma(t)$ の曲率関数を $\kappa(t)$ とする．
もうひとつの曲線 $\tilde\gamma$ を $\tilde\gamma(t) := A\gamma(t) + \boldsymbol{a}$ $(A \in \mathrm{SO}(2),\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2)$ で定めると $\tilde\gamma$ の曲率関数も κ である．

$$\dot{\tilde\gamma} = A\dot\gamma \qquad \ddot{\tilde\gamma} = A\ddot\gamma$$

折り返し
κの符号をかえる

$$\frac{\det(\dot{\tilde\gamma}\ \ddot{\tilde\gamma})}{|\dot{\tilde\gamma}|^3} = \frac{\det(A\dot\gamma\ A\ddot\gamma)}{|A\dot\gamma|^3}$$

$$= \frac{\overset{+1}{\det A}\,\det(\dot\gamma, \ddot\gamma)}{|\dot\gamma|^3} = \frac{\det(\dot\gamma\,\ddot\gamma)}{|\dot\gamma|^3} = \kappa$$

平面曲線の基本定理

定理 (平面曲線の基本定理（テキスト 22 ページ，定理 2.8）)

区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上で定義された C^∞-級関数 $\kappa\colon I \ni s \mapsto \kappa(s) \in \mathbb{R}$ に対して，弧長によりパラメータづけられた平面曲線 $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ で，曲率関数が $\kappa(s)$ となるものが存在する．さらに，そのような曲線は $\mathbb{R}^2$ の回転と平行移動で移り合うものを除き唯一である．

- 後半（一意性）は第 4 回に示す．
- 前半の証明：

$$\theta(s) := \int_{s_0}^{s} \kappa(u)\,du, \quad \gamma(s) := \int_{s_0}^{s} (\cos\theta(u), \sin\theta(u))\,du$$

とおけばよい．

$$\begin{cases} |\gamma'(s)| = 1 \\ \det(\gamma', \gamma'') = \kappa \end{cases}$$

- 別証明を第 5 回に与える．

平面曲線の基本定理

命題

式

$$\theta(s) := \int_{s_0}^{s} \kappa(u)\,du, \quad \gamma(s) := \int_{s_0}^{s} \big(\cos\theta(u), \sin\theta(u)\big)\,du$$

で定まる γ は弧長によりパラメータづけられた曲線で，その曲率関数は κ である.

$\kappa = 1$ $\quad \theta = s$ $\quad 1 - \cos u$

$\gamma = \int_{0}^{s} (\cos u, \sin u)\,du$

$= (\sin u, -\cos u + 1)$

問題 1-1

問題

弧長によりパラメータ付けられた平面曲線 $\gamma(s)$ で，その曲率関数が $1/(1+s^2)$，$2/(1+s^2)$ となるものの具体的な表示をそれぞれ求めなさい．

κ κ

問題 1-2

問題

弧長によりパラメータ付けられた平面曲線 $\gamma(s)$ で，その曲率関数が $a\cos s + b$ (a, b は定数) となるものに対して，
$\gamma(s+2\pi) = A\gamma(s) + \boldsymbol{a}$ となる $A \in \mathrm{SO}(2)$ と $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ が存在することを認めて，A を a, b を用いて具体的に表しなさい．

$\kappa = a\cos s + b$ 　　 2π-周期