幾何学概論第一 (MTH.B211)

1: 平面曲線の基本定理

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2020/10/01 (2020/10/08 **訂正**)

目標

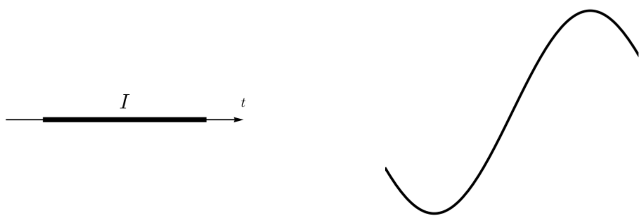
定理 (平面曲線の基本定理（テキスト 22 ページ，定理 2.8）)
区間 $I \subset \mathbb{R}$ **上で定義された** C^∞**-級関数** $\kappa\colon I \ni s \mapsto \kappa(s) \in \mathbb{R}$ **に対して，弧長によりパラメータづけられた平面曲線** $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ **で，曲率関数が** $\kappa(s)$ **となるものが存在する．さらに，そのような曲線は** $\mathbb{R}^2$ **の回転と平行移動で移り合うものを除き唯一である．**

- **回転と平行移動：**$\mathbb{R}^2$ **の向きを保つ合同変換．**

平面曲線のパラメータ表示

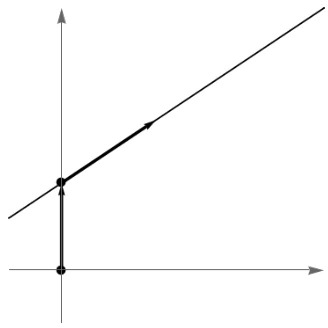
- **平面曲線のパラメータ表示：区間** $I \subset \mathbb{R}$ **上で定義された** C^∞**-級写像**

$$\gamma\colon \mathbb{R} \supset I \ni t \longmapsto \gamma(t) = \bigl(x(t), y(t)\bigr) \in \mathbb{R}^2.$$



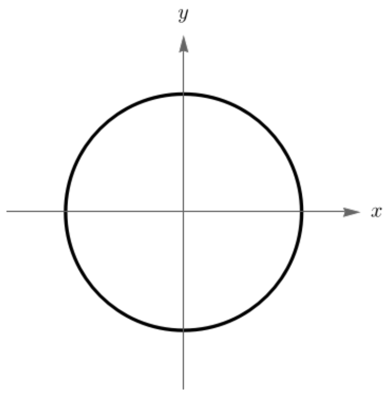
例：直線

$\gamma(t) = t\boldsymbol{v} + \boldsymbol{a} \qquad (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{0}\},\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2)$



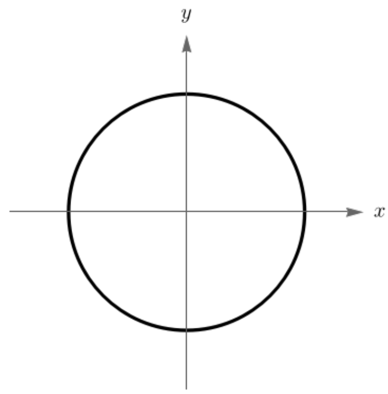
例：円

$\gamma(s) = (\cos s, \sin s)$



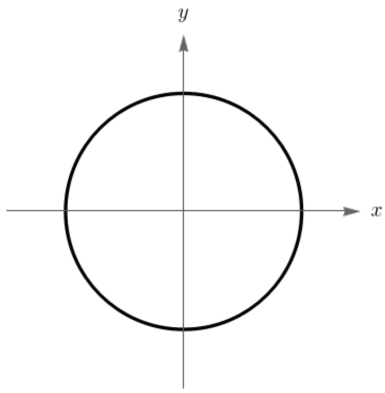
例：円（射影直線）

$$\gamma(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$$



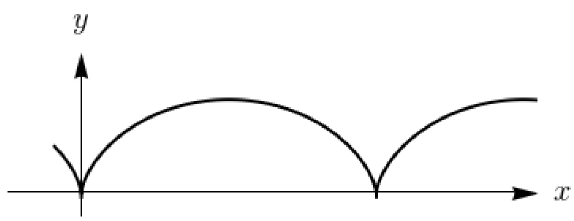
例：円

$\gamma(u) = (\operatorname{sech} u, \tanh u)$



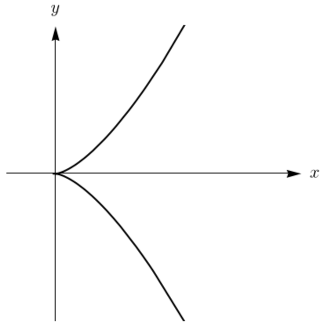
例：サイクロイド

$\gamma(t) = \bigl(t - \sin t, 1 - \cos t\bigr)$



例：カスプ

$\gamma(t) = (t^2, t^3)$



正則にパラメータ付けられた平面曲線

定義

パラメータ付けられた平面曲線 $\gamma(t)$ が $t = t_0$ で正則であるとは

$$\dot\gamma(t_0) \neq \mathbf{0} \qquad \dot{} = \frac{d}{dt}$$

を満たすことである．
とくに $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ が正則にパラメータづけられた曲線であるとは，γ が I の各点で正則となることである．

- 正則でない点をパラメータ表示の特異点という．
- 正則な点の近くでは曲線は「なめらか」である．
- なめらかな図形でも，正則でないパラメータ表示ができる．
  例：$\gamma(t) = (t^3, 0)$

弧長パラメータ

定義

パラメータ付けられた平面曲線 $\gamma(s)$ が弧長によりパラメータづけられているとは

$$|\gamma'(s)| = 1 \qquad \left({}' = \frac{d}{ds}\right)$$

が恒等的に成り立つことである．

- 弧長によるパラメータづけられているならば，正則にパラメータ表示されている．
- 正則にパラメータ表示される曲線は，弧長パラメータに変換することができる（次回）
- 「弧長」の語の意味は次回．
- 例：$\gamma(s) = (\cos s, \sin s)$

曲率関数

定義

正則にパラメータ付けられた曲線 $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ の曲率（曲率関数）とは

$$\kappa(t) := \frac{\det(\dot\gamma(t), \ddot\gamma(t))}{|\dot\gamma(t)|^3} \qquad \left(\dot{} = \frac{d}{dt}\right)$$

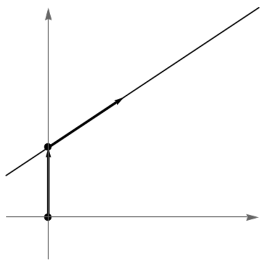
で与えられる関数のことである．ただし右辺の分子は 2 つの列ベクトル $\dot\gamma$, $\ddot\gamma$ が成す 2×2 行列の行列式を表す．
弧長によりパラメータづけられた曲線 $\gamma(s)$ の曲率は

$$\kappa(s) = \det(\gamma'(s), \gamma''(s)) \qquad \left({}' = \frac{d}{ds}\right)$$

である．

直線

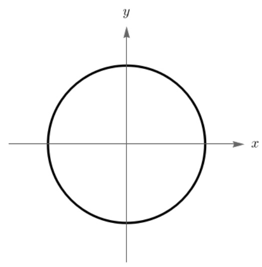
$\gamma(t) = t\boldsymbol{v} + \boldsymbol{a} \qquad (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\},\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2)$



$\kappa(t) =$

例：円

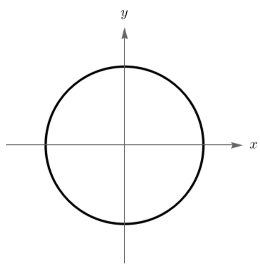
$\gamma(s) = r(\cos s, \sin s) \qquad (r > 0)$



$\kappa(s) =$

円 2

$\gamma(u) = r(\operatorname{sech} u, \tanh u) \qquad (r > 0)$



$\kappa(u) =$

曲率の合同変換による不変性

定理

曲率は $\mathbb{R}^2$ の回転と平行移動で不変である．
言い換えれば，

命題

正則にパラメータづけられた平面曲線 $\gamma(t)$ の曲率関数を $\kappa(t)$ とする．
もうひとつの曲線 $\tilde\gamma$ を

$$\tilde\gamma(t) := A\gamma(t) + \boldsymbol{a} \qquad (A \in \mathrm{SO}(2),\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2)$$

で定めると $\tilde\gamma$ の曲率関数も κ である．

曲率の合同変換による不変性

命題

正則曲線 $\gamma(t)$ の曲率関数を $\kappa(t)$ とする．
もうひとつの曲線 $\tilde{\gamma}$ を $\tilde{\gamma}(t) := A\gamma(t) + \boldsymbol{a}$ $(A \in \mathrm{SO}(2),\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2)$ で定めると $\tilde{\gamma}$ の曲率関数も κ である．

平面曲線の基本定理

定理 (平面曲線の基本定理（テキスト 22 ページ，定理 2.8）)

区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上で定義された C^∞-級関数 $\kappa\colon I \ni s \mapsto \kappa(s) \in \mathbb{R}$ に対して，弧長によりパラメータづけられた平面曲線 $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ で，曲率関数が $\kappa(s)$ となるものが存在する．さらに，そのような曲線は $\mathbb{R}^2$ の回転と平行移動で移り合うものを除き唯一である．

- 後半（一意性）は第 4 回に示す．
- 前半の証明：

$$\theta(s) := \int_{s_0}^{s} \kappa(u)\, du, \quad \gamma(s) := \int_{s_0}^{s} \bigl(\cos\theta(u), \sin\theta(u)\bigr)\, du$$

  とおけばよい．
- 別証明を第 5 回に与える．

平面曲線の基本定理

命題

式

$$\theta(s) := \int_{s_0}^{s} \kappa(u)\, du, \quad \gamma(s) := \int_{s_0}^{s} \bigl(\cos\theta(u), \sin\theta(u)\bigr)\, du$$

で定まる γ は弧長によりパラメータづけられた曲線で，その曲率関数は κ である．

問題 1-1

問題

弧長によりパラメータ付けられた平面曲線 $\gamma(s)$ で，その曲率関数が $1/(1+s^2)$，$2/(1+s^2)$ となるものの具体的な表示をそれぞれ求めなさい．

問題 1-2

問題

弧長によりパラメータ付けられた平面曲線 $\gamma(s)$ で，その曲率関数が $a\cos s + b$ $(a,\ b$ は定数) となるものに対して，
$\gamma(s + 2\pi) = A\gamma(s) + \boldsymbol{a}$ となる $A \in \mathrm{SO}(2)$ と $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ が存在することを認めて，A を $a,\ b$ を用いて具体的に表しなさい．