

幾何学概論第一 (MTH.B211)

1: 平面曲線の基本定理

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2020/10/01 (2020/10/08 訂正)

目標

定理 (平面曲線の基本定理 (テキスト 22 ページ, 定理 2.8))

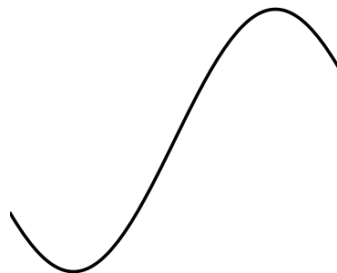
区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上で定義された C^∞ -級関数 $\kappa: I \ni s \mapsto \kappa(s) \in \mathbb{R}$ に対して, 弧長によりパラメータづけられた平面曲線 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ で, 曲率関数が $\kappa(s)$ となるものが存在する. さらに, そのような曲線は \mathbb{R}^2 の回転と平行移動で移り合うものを除き唯一である.

- ▶ 回転と平行移動: \mathbb{R}^2 の向きを保つ合同変換.

平面曲線のパラメータ表示

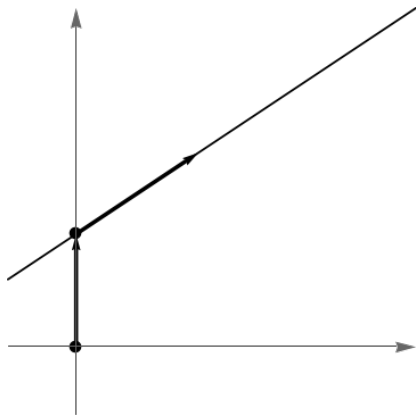
- ▶ 平面曲線のパラメータ表示：区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上で定義された C^∞ -級写像

$$\gamma: \mathbb{R} \supset I \ni t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2.$$



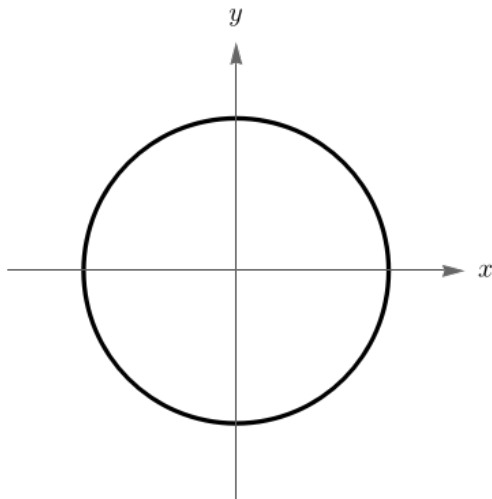
例：直線

$$\gamma(t) = t\mathbf{v} + \mathbf{a} \quad (\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2)$$



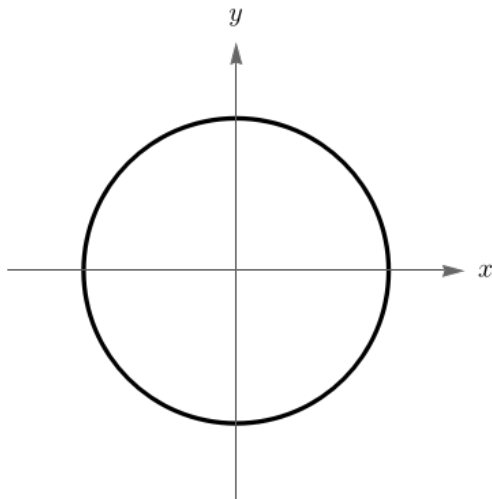
例：円

$$\gamma(s) = (\cos s, \sin s)$$



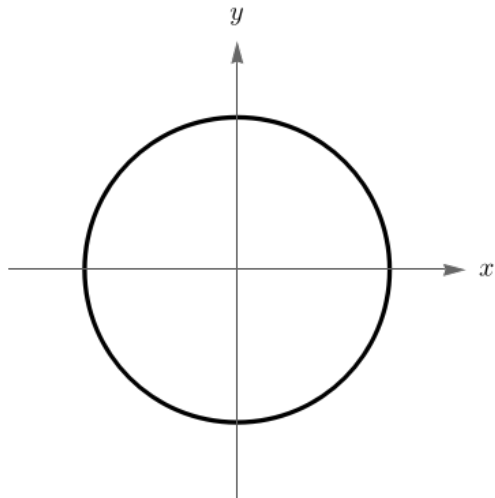
例：円（射影直線）

$$\gamma(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)$$



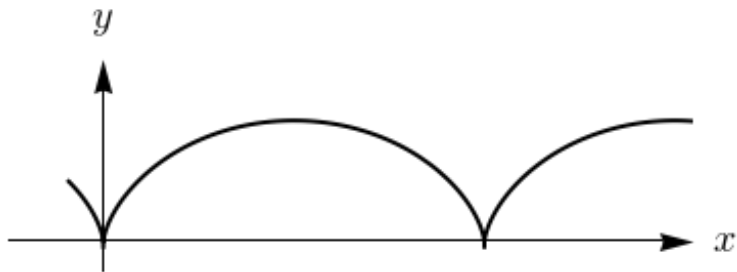
例：円

$$\gamma(u) = (\operatorname{sech} u, \tanh u)$$



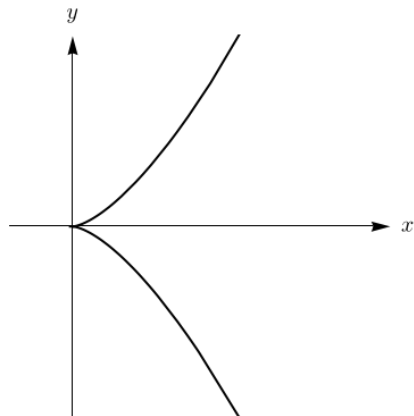
例：サイクロイド

$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$$



例：カスプ

$$\gamma(t) = (t^2, t^3)$$



正則にパラメータ付けられた平面曲線

定義

パラメータ付けられた平面曲線 $\gamma(t)$ が $t = t_0$ で正則であるとは

$$\dot{\gamma}(t_0) \neq \mathbf{0} \quad \cdot = \frac{d}{dt}$$

を満たすことである。

とくに $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ が正則にパラメータづけられた曲線であるとは、 γ が I の各点で正則となることである。

- ▶ 正則でない点をパラメータ表示の特異点という。
- ▶ 正則な点の近くでは曲線は「なめらか」である。
- ▶ なめらかな図形でも、正則でないパラメータ表示ができる。
例： $\gamma(t) = (t^3, 0)$

弧長パラメータ

定義

パラメータ付けられた平面曲線 $\gamma(s)$ が弧長によりパラメータづけられているとは

$$|\gamma'(s)| = 1 \quad \left(' = \frac{d}{ds} \right)$$

が恒等的に成り立つことである。

- ▶ 弧長によるパラメータづけられているならば，正則にパラメータ表示されている。
- ▶ 正則にパラメータ表示される曲線は，弧長パラメータに変換することができる（次回）
- ▶ 「弧長」の語の意味は次回。
- ▶ 例： $\gamma(s) = (\cos s, \sin s)$

曲率関数

定義

正則にパラメータ付けられた曲線 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ の曲率 (曲率関数) とは

$$\kappa(t) := \frac{\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t))}{|\dot{\gamma}(t)|^3} \quad \left(\cdot = \frac{d}{dt} \right)$$

で与えられる関数のことである。ただし右辺の分子は2つの列ベクトル $\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}$ が成す 2×2 行列の行列式を表す。

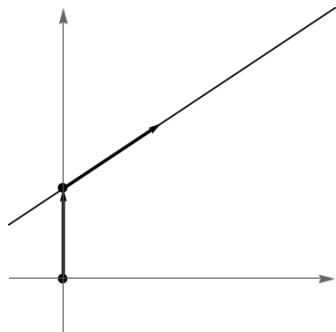
弧長によりパラメータづけられた曲線 $\gamma(s)$ の曲率は

$$\kappa(s) = \det(\gamma'(s), \gamma''(s)) \quad \left(' = \frac{d}{ds} \right)$$

である。

直線

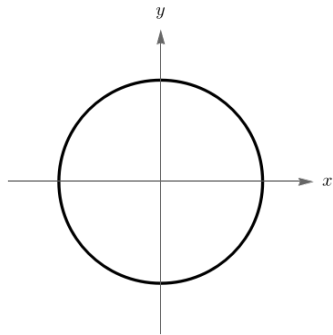
$$\gamma(t) = t\mathbf{v} + \mathbf{a} \quad (\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2)$$



$$\kappa(t) =$$

例：円

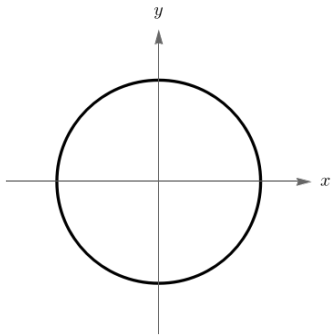
$$\gamma(s) = r(\cos s, \sin s) \quad (r > 0)$$



$$\kappa(s) =$$

円 2

$$\gamma(u) = r(\operatorname{sech} u, \tanh u) \quad (r > 0)$$



$$\kappa(u) =$$

曲率の合同変換による不変性

定理

曲率は \mathbb{R}^2 の回転と平行移動で不変である .

言い換えれば ,

命題

正則にパラメータづけられた平面曲線 $\gamma(t)$ の曲率関数を $\kappa(t)$ とする .

もうひとつの曲線 $\tilde{\gamma}$ を

$$\tilde{\gamma}(t) := A\gamma(t) + \mathbf{a} \quad (A \in \text{SO}(2), \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2)$$

で定めると $\tilde{\gamma}$ の曲率関数も κ である .

曲率の合同変換による不変性

命題

正則曲線 $\gamma(t)$ の曲率関数を $\kappa(t)$ とする .

もうひとつの曲線 $\tilde{\gamma}$ を $\tilde{\gamma}(t) := A\gamma(t) + \mathbf{a}$ ($A \in \text{SO}(2)$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$)
で定めると $\tilde{\gamma}$ の曲率関数も κ である .

平面曲線の基本定理

定理 (平面曲線の基本定理 (テキスト 22 ページ, 定理 2.8))

区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上で定義された C^∞ -級関数 $\kappa: I \ni s \mapsto \kappa(s) \in \mathbb{R}$ に対して, 弧長によりパラメータづけられた平面曲線 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ で, 曲率関数が $\kappa(s)$ となるものが存在する. さらに, そのような曲線は \mathbb{R}^2 の回転と平行移動で移り合うものを除き唯一である.

- ▶ 後半 (一意性) は第 4 回に示す.
- ▶ 前半の証明:

$$\theta(s) := \int_{s_0}^s \kappa(u) du, \quad \gamma(s) := \int_{s_0}^s (\cos \theta(u), \sin \theta(u)) du$$

とおけばよい.

- ▶ 別証明を第 5 回に与える.

平面曲線の基本定理

命題

式

$$\theta(s) := \int_{s_0}^s \kappa(u) du, \quad \gamma(s) := \int_{s_0}^s (\cos \theta(u), \sin \theta(u)) du$$

で定まる γ は弧長によりパラメータづけられた曲線で，その曲率関数は κ である．

問題 1-1

問題

弧長によりパラメータ付けられた平面曲線 $\gamma(s)$ で、その曲率関数が $1/(1+s^2)$ 、 $2/(1+s^2)$ となるものの具体的な表示をそれぞれ求めなさい。

問題 1-2

問題

弧長によりパラメータ付けられた平面曲線 $\gamma(s)$ で、その曲率関数が $a \cos s + b$ (a, b は定数) となるものに対して、
 $\gamma(s + 2\pi) = A\gamma(s) + \mathbf{a}$ となる $A \in \text{SO}(2)$ と $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ が存在することを認めて、 A を a, b を用いて具体的に表しなさい。