

2020 年 10 月 1 日 (2020 年 10 月 8 日訂正)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 (MTH.B211) 講義資料 1

講義概要

重要なポイント

- <http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-1/> (この授業の公式ページ)
- <http://www.official.kotaroy.com/class/2020/geom-1/> (この授業のページ; ミラーサイト)
- <https://t2schola.titech.ac.jp/> (T2SCHOLA; 課題の提出, 返却はこちら)

科目名など 幾何学概論第一 (MTH.B211) (木曜日・3/4 時限・理学院数学系)

担当者 山田光太郎 (理学院数学系) kotaro@math.titech.ac.jp

講義の概要 線形代数学, 微分積分学から必要な事項を整理したのち, 以下の事項を学ぶ: 平面曲線のパラメータ表示・弧長・曲率・曲率の幾何学的意味・フルネの公式・平面曲線の基本定理・空間曲線の曲率と捩率・空間曲線の基本定理・平面・空間曲線の微分幾何学の基本事項を通して, これまでに学んだ線形代数学・微分積分学が使われる場面を体験し, 変換・不変量といった現代幾何学の基本的な概念を知る.

到達目標 平面曲線, 空間曲線の微分幾何学の基本的な事項を学ぶ. (1) 曲線の曲率や捩率を合同変換やパラメータ変換で不変な量としてとらえ, それが曲線を決定すること (曲線論の基本定理) を理解する. (2) 閉曲線の位相幾何学的な性質と曲率の関係を通して, 局所的な概念と大域的な概念の違いを知る. (3) これらの理論を具体例の計算によって確認する. 本講義の続編として「幾何学概論第二」が第 4 クォーターに開講される.

教科書 梅原雅顕・山田光太郎『曲線と曲面』改訂版 (裳華房)

正誤表: <http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/publication/surface-jp.html>

成績評価の方法

- 第 1 回から第 5 回までの授業で課題 (詳細は後述) を提出してもらおう. これを 1 回あたり 5 点満点で評価し, フィードバックする.
- 最終回 (第 7 回) にオンラインにて試験を行う. 試験の方法は現在検討中. 試験実施の 2 週間前の講義の際に説明する. これを 100 点満点 (予定) で評価する. 試験を受験することは単位を得るための必要条件である (十分条件ではない). 正当な理由 (ネットワーク環境の問題を含む) で試験を受けられない人は可能な限り事前に電子メールにて講義担当者まで連絡すること.
- 成績は試験と課題の得点から決定する. 決定の方式は次の通り: 課題の得点の合計を x 点 ($0 \leq x \leq 25$), 試験の得点を y 点 ($0 \leq y \leq 100$) としたとき,

$$Z := 5 \times \left[A \times \frac{z}{5} \right], \quad z := (1-a)(4x) + ay$$

で与えられる Z と 100 のうち大きくない方を評価点とする (予定). ただし, $[x]$ は x を超えない最大の整数, 係数 $a \in [0, 1]$ は試験答案提出時に受講者自身が決める定数, $A \in [1, +\infty)$ は平均点を調整するために採点時に決める定数である.

課題とその評価方法

- 1 講義の際に提示する問題のうちから 1 問を選んで回答する。2 点満点
- 2 講義内容、講義資料の誤りの指摘または質問 3 点満点。講義中に zoom のチャット機能を用いて指摘・質問をしてもよい。その際は提出要旨のチャットの欄をチェックすること。
 - 評価基準：基本点 2 点；計算・議論を自分で追わないと見つけられないような誤りの指摘・質問は 3 点；同一の指摘が 5 件以上あるものは 1 点減点；講義内容と無関係、高校生程度の誤認、講義中に指摘した内容、チャットでの指摘と同一内容、文として成立しないものは 0 点。
 - 複数の質問・誤りの指摘はそのうち最高点のものを評価点とする。

提出方法

- 所定の用紙 (A4 版 2 枚) —提出用紙— に記入して T2SCHOLA にて提出。
- 用紙は、講義 web ページ, OCW/OCW-i, T2SCHOLA に pdf 形式で置く。採点の都合上、提出用紙のフォーマットの変更、ページの追加は不可。
- 電子ファイルでの提出は、見た目のフォーマットが同一であれば可。(0) 印刷した提出用紙に手書きしたものをスキャンする。スキャンには、ドキュメントスキャナその他、スマートフォンなどのカメラやコンビニエンス・ストアのコピー機 (ただし有料) が使える (1) ワードプロセッサで回答をつくり背景に提出用紙の画像を使う (2) ワードプロセッサで回答をつくり、提出用紙の pdf ファイルに貼り付ける (3) 提出用紙の pdf ファイルにタブレットコンピュータなどを用いて回答を書き込み、pdf として出力する (4) 提出用紙の \LaTeX ソースを hack して書き込む、など。
- 提出期限は講義直後の土曜日の 23 時 59 分 (JST) とします。
- 提出物は次回の講義までに返却する；質問等には個人が特定できない形で回答する。
- 提出用紙には授業への意見・希望を記入する欄を設けています。ここに記入されたことは成績に一切関係ありません。なお、内容は個人を特定できない形で講師のコメントとともに公開いたします。

FAQ

- Q: なぜ質問を評価するのか。
- A: 講義を聞いて頭を働かせて欲しいから。
- Q: なぜ誤りの指摘を評価するのか。
- A: 講義を聴いた、講義資料を読んだということだから。
- Q: なぜ質問・誤りの指摘の満点が問題の満点より大きいのか。
- A: 本学の学生は問題があれば黙っていても解くだろう。それ以外の授業の参加を積極的に評価したい。
- Q: オンラインなのになぜ無理して試験を行うのか。
- A: 今後「新しい生活様式」において、従来の形式での一斉試験を行うためのハードルが上がると予想される。その準備として、オンライン試験の方法を考えておきたい、そのための「実験」。
- Q: 試験の点数と課題の点数の重みを自分で決められるのはなぜか。
- A: 従来は定期試験のみで評価、それで評点の低い人は提出物の得点で底上げしていた。今年度は定期試験を公平かつ確実に実施し難いので、自身で評価の仕方を決めること少しでも不公平感を払拭したい。

0 ユークリッド空間

内積 この講義では標準的な内積 “ \cdot ” が与えられた \mathbb{R}^n のことをユークリッド空間^{*1}という。ベクトル $v, w \in \mathbb{R}^n$ を列ベクトルと見なしたとき $v \cdot w = {}^t v w$ である。ただし右辺の ${}^t v$ は v の転置^{*2}を表し、右辺の積は行列の積を表す。これを用いて、ベクトル v の大きさを $|v| = \sqrt{v \cdot v}$ と定める。また、 \mathbb{R}^n の 2 点 P, Q の距離を $d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}|$ で定める。ただし O は座標原点である。

直交行列 実数を成分とする n 次正方行列 A が直交行列^{*3}である、とは ${}^t A A = A {}^t A = I (= n$ 次単位行列) が成り立つことである。

命題. 次数 n の 実正方行列 A が直交行列であることと、次の各々は同値である：

- 任意のベクトル $v, w \in \mathbb{R}^n$ に対して $(Av) \cdot (Aw) = v \cdot w$.
- 任意のベクトル $v \in \mathbb{R}^n$ に対して $|Av| = |v|$.
- A の n 個の列ベクトルが \mathbb{R}^n の正規直交基をなす。

命題. • 直交行列の行列式の値は 1 または -1 である。

- $O(n)$ を n 次直交行列全体の集合、 $SO(n)$ を n 次直交行列で行列式が 1 であるもの全体とする。このとき、 $G = O(n), SO(n)$ のそれぞれに対して

$$I \in G; \quad A, B \in G \text{ ならば } AB \in G; \quad A \in G \text{ ならば } A \text{ は正則で } A^{-1} \in G$$

が成り立つ^{*4}。

等長変換 写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が等長変換であるとは、各 $P, Q \in \mathbb{R}^n$ に対して $d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$ が成り立つことである^{*5}。

命題. 列ベクトル x を \mathbb{R}^n の点 (原点を起点とする位置ベクトル) とみなすとき、

$$(*) \quad f: \mathbb{R}^n \ni x \mapsto Ax + a \in \mathbb{R}^n \quad (A \in O(n), a \in \mathbb{R}^n)$$

であたえられる f は \mathbb{R}^n の等長変換である。

定理. \mathbb{R}^n の等長変換は (*) の形に限る。

定義. \mathbb{R}^n の等長変換を合同変換ということもある。とくに (*) の形をした合同変換のうち $A \in SO(n)$ となるものを向きを保つ合同変換、そうでないものを 向きを反転する合同変換という。

2020 年 10 月 1 日 (2020 年 10 月 8 日訂正)

*1 内積 : an inner product; ユークリッド空間 : the Euclidean space; 列ベクトル : a column vector.

*2 転置 : transposition; (ベクトルの) 大きさ : the length (norm) of the vector; 距離 : the distance; 座標原点 : the origin.

*3 直交行列 : an orthogonal matrix; 単位行列 : the identity matrix; 正規直交基 : an orthonormal basis.

*4 このことを $O(n), SO(n)$ は行列の積に関して群を成すという。とくに $O(n)$ を n 次直交群 orthogonal group, $SO(n)$ を n 次特殊直交群 special orthogonal group という。

*5 等長変換 : an isometry; 合同変換 : a congruence; 向きをたもつ (反転する) : orientation preserving (reversing)

1 平面曲線の基本定理

定義 1.1. 数直線上の区間 $I \subset \mathbb{R}$ から \mathbb{R}^m への C^∞ -級写像 $\gamma: I \ni t \mapsto \gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t)) \in \mathbb{R}^m$, すなわち各 $j = 1, \dots, m$ に対して $x_j: I \rightarrow \mathbb{R}$ が C^∞ -級関数となるものを \mathbb{R}^m の曲線のパラメータ表示 (助変数表示, 媒介変数表示)^{*6} という. とくに γ が正則^{*7} であるとは $\dot{\gamma}(t) \neq \mathbf{0}$ がすべての $t \in I$ で成り立つこと. ただし $\dot{\cdot} = d/dt$. このとき γ は正則にパラメータ付けられた曲線ということがある.

また, γ が弧長によりパラメータ付けられている^{*8} とは $|\dot{\gamma}(t)| = 1$ がすべての $t \in I$ で成り立つことである.

定義 1.2. 正則にパラメータ付けられた曲線 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ の曲率 (曲率関数)^{*9} とは

$$\kappa(t) := \frac{\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t))}{|\dot{\gamma}(t)|^3} \quad \left(\dot{\cdot} = \frac{d}{dt} \right)$$

与えられる関数のことである. ただし右辺の分子は 2 つの列ベクトル $\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}$ が成す 2×2 行列の行列式を表す. 弧長によりパラメータづけられた曲線 $\gamma(s)$ の曲率は $\kappa(s) = \det(\gamma'(s), \gamma''(s))$ ($' = d/ds$) である.

補題 1.3. 曲率は \mathbb{R}^2 の回転と平行移動で不変である.

証明. 正則にパラメータづけられた曲線 $\gamma(t)$ に対して $\tilde{\gamma}(t) := A\gamma(t) + \mathbf{a}$ とおく. ただし $A \in \text{SO}(2)$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$. すると $|\dot{\tilde{\gamma}}| = |A\dot{\gamma}| = |\dot{\gamma}|$, $\det(\dot{\tilde{\gamma}}, \ddot{\tilde{\gamma}}) = \det(A\dot{\gamma}, A\ddot{\gamma}) = (\det A) \det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}) = \det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma})$ より $\tilde{\gamma}$ の曲率は γ の曲率に一致する. \square

定理 1.4 (平面曲線の基本定理^{*10}: テキスト p. 22, 定理 2.8). 区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上で定義された C^∞ -級関数 $\kappa: I \ni s \mapsto \kappa(s) \in \mathbb{R}$ に対して, 弧長によりパラメータづけられた平面曲線 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ で, 曲率関数が $\kappa(s)$ となるものが存在する. さらに, そのような曲線は \mathbb{R}^2 の回転と平行移動で移り合うものを除き唯一である.

証明. 点 $s_0 \in I$ を一つ固定して,

$$(1.1) \quad \theta(s) := \int_{s_0}^s \kappa(u) du, \quad \gamma(s) := \int_{s_0}^s (\cos \theta(u), \sin \theta(u)) du$$

とおけば γ は弧長によりパラメータづけられた曲線で, 曲率は $\kappa(s)$ となる. 後半は第 4 回に証明する. \square

問題

- 1-1 弧長によりパラメータ付けられた平面曲線 $\gamma(s)$ で, その曲率関数が $1/(1+s^2)$, $2/(1+s^2)$ となるものの具体的な表示をそれぞれ求めなさい.
- 1-2 弧長によりパラメータ付けられた平面曲線 $\gamma(s)$ で, その曲率関数が $a \cos s + b$ (a, b は定数) となるものに対して, $\gamma(s+2\pi) = A\gamma(s) + \mathbf{a}$ となる $A \in \text{SO}(2)$ と $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ が存在することを認めて, A を a, b を用いて具体的に表しなさい.

*6 曲線のパラメータ表示: a parametrization of a curve

*7 正則: regular

*8 弧長によりパラメータ付けられている: parametrized by the arclength

*9 曲率: curvature

*10 平面曲線の基本定理: the fundamental theorem for plane curves