幾何学概論第一 (MTH.B211)

おしらせ・コメント

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2010/10/08

お知らせ

- 36 名の方から課題の提出がありました．評点およびマーク済みの答案は t2schola におきます．
- マーク済み答案には山田の「汚い字」が書いてあります．これは山田用のメモですので，見なかったことにしてください（読めたらそれでもよいです）．回答やコメントは，講義資料にあるものが正式です．
- PDF のペーパーサイズは A4 にしてください．全ての答案を一つの pdf にマージしてから見ますので，サイズが違うと不具合が生じます．
- 一部のソフトウェアが当方のものとの相性が悪いらしく，答案の一部分が消えてしまうという事故が発生しました．なるべくこちらで対応いたしますが，不具合がありましたらお知らせください．

授業の感想など

- 早い.　山田のコメント：ごめん
- 講義概要のスライドは暗い背景に黒字でみづらかったです.
  山田のコメント：変更しました
- この提出フォーマットの docx 版を公開して欲しいです.
- 罫線のあるバージョンを作っていただくことは可能ですか？
  山田のコメント：作って下さい！できたら共有しましょう.
- 大学で学ぶ幾何学というのがかなりわかりづらく抽象度が高いものというイメージがありましたが，初回の講義はわかりやすく安心しました.
  山田のコメント：そう？関係ないかもしれませんが「抽象的で分かりづらい」という人に「具体的に答えを出せ」というとなにも返ってこない現象に名前をつけたい.

質問と回答

Q

補題 1.3 で $\tilde{\gamma}(t) = A\gamma(t) + \boldsymbol{a}$ とおくのがわかりません.

A

そうですか.

- 何を見てどう考えて，どこで行き詰まったのかを教えてください.

Q

特異点を 1 つでももつ関数は曲率がないということでしょうか.

A

「特異点をもつ関数」とは？

$\dot{\gamma} = 0$ となる点

- 関数と関数のグラフの違い？

$f: X \to Y$: $X \times Y$ のある部分集合

質問と回答

Q

講義で $\theta(s)$, $\gamma(s)$ を θ, γ と表記していましたが，テストなどでもそのように表記して良いのでしょうか．

A

独立変数を省略する，ということでしょうか．誤解がおきない文脈ならよいのではないでしょうか．

- テストで，というのはあまり良い質問ではないですね．
- 通じればよいのです．
- この科目の試験ではかならずフィードバックとクレイムの機会を設けます．

質問と回答

Q

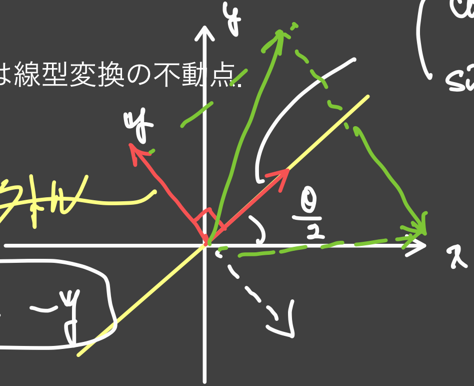
$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \in O(2) \setminus SO(2)$ による $\mathbb{R}^2$ への作用について x 軸正と $\frac{\theta}{2}$ 方向のなす直線に対しての反転であることの説明について（山田注：言葉遣いが変？），何故固有値が現れるのか（行列の固有値の平面における意味）が分かりませんでした.

A

1-固有ベクトル

A

1-固有ベクトルは線型変換の不動点.



$\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = x$

(-1)固有ベクトル

$\boxed{Ay = -y}$

$\boxed{Ax = x}$

質問と回答

Q
等長変換全体は写像の合成に関して群を成すことから等長変換は全単射であることが必要であると思うのですが，それは等長変換の定義に含めなくて良いのですか？

Q
等長変換全体の集合が合成に関して群をなすことの証明で，逆元が存在することの証明のために等長変換が全単射であることを示したかったのですが，全射性が示せませんでした.

質問と回答（等長変換の全射性）

A

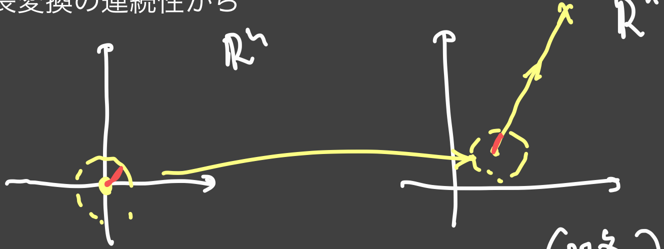
全単射であることが等長性から示せる.

- $\boxed{\varphi(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}}$ $(A \in \mathrm{O}(n))$の形から）

A: 正則

$$\varphi^{-1}(x) = A^{-1}(x - a) = A^{-1}x - A^{-1}a$$

- 等長変換の連続性から



(略)

質問と回答

Q

smooth

『正則な点の近くでは曲線が「なめらか」である』とありましたが,「なめらか」とはどういうことですか？

Q

授業ででてきた「なめらか」とは何回も微分可能という意味でしょうか？

$\forall r$: C^r-級

A

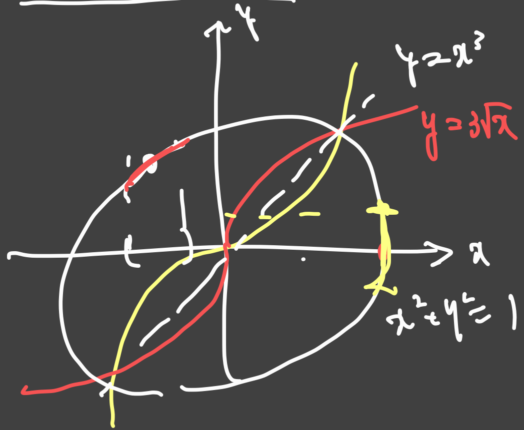
この講義ではきちんと定義しない.

- C^∞-級関数のグラフは「なめらか」.
- C^∞-級関数のグラフと合同な曲線は「なめらか」
- 十分小さい範囲にかぎれば C^∞-級関数のグラフと合同な曲線は「なめらか」

質問と回答（なめらか）

0で微分可能でな.

- グラフ $y = x^3$ は「なめらか」
- グラフ $y = \sqrt[3]{x}$ は「なめらか」
- 集合 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ は「なめらか」



質問と回答（なめらか）

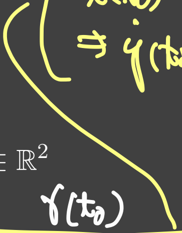
主張
正則にパラメータ付けられた曲線

$$\gamma\colon \mathbb{R}\supset I\ni t\longmapsto \gamma(t)=\underbrace{\big(x(t),y(t)\big)}\in\mathbb{R}^2$$

はなめらか

$\dot{\gamma}\neq 0$

$\dot{x}(t_0)=0 \Rightarrow \dot{y}(t_0)\neq 0$



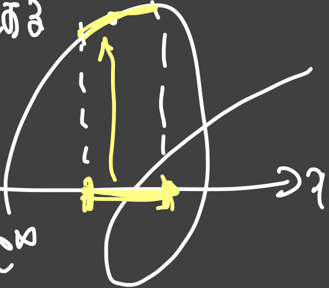
$t_0\in I$　$\dot{x}(t_0)\neq 0$ とする

$\Rightarrow \exists\varepsilon$　$(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)\xrightarrow{x}\mathbb{R}$

$\boxed{\dot{x}\neq 0}$ 単調増加

$x^{-1}: x\mapsto t=t(x)$　: C^∞

$y=y(t)=y\circ t(x)$: graph　C^∞



講義

この後，短い休憩をとり，2 つの「講義」を行います.
質問などをチャットで行なう場合は，全員宛てにしてください

1　平面曲線の基本定理（補足）

2　パラメータ変換と弧長