# 幾何学概論第一 (MTH.B211)

## 1: 平面曲線の基本定理（補足）

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2010/10/08

# 復習

## 定理 (平面曲線の基本定理（テキスト 22 ページ，定理 2.8）)

区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上で定義された $C^\infty$-級関数 $\kappa\colon I \ni s \mapsto \kappa(s) \in \mathbb{R}$ に対して，弧長によりパラメータづけられた平面曲線 $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ で，曲率関数が $\kappa(s)$ となるものが存在する．さらに，そのような曲線は $\mathbb{R}^2$ の回転と平行移動で移り合うものを除き唯一である．

## 定義

正則曲線 $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ の曲率 $\kappa$ を次で定める：

$$\kappa(t) := \frac{\det(\dot\gamma(t), \ddot\gamma(t))}{|\dot\gamma(t)|^3} \qquad \left(\cdot = \frac{d}{dt}\right)$$

弧長によりパラメータづけられた曲線 $\gamma(s)$ の曲率は

$$\kappa(s) = \det(\gamma'(s), \gamma''(s)) \qquad \left({}' = \frac{d}{ds}\right).$$

# 与えられた曲率をもつ平面曲線

パラメータ $s$ が弧長で，曲率が $\kappa(s)$ であるような曲線の構成：

$I = [0, l]$

$$\gamma(s) := \int_{s_0}^{s} \bigl(\cos\theta(u), \sin\theta(u)\bigr)\,du, \qquad \theta(s) := \int_{s_0}^{s} \kappa(u)\,du.$$

**Q**

$s_0$ は何か． A: 任意定数． $\gamma(s_0) = (0,0)$, $\gamma'(s_0) = (1,0)$ となる．

**Q**

この式はどうやったら思いつくのか．

A: $\gamma'(s)$ は単位ベクトルだから $\gamma'(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$ となるような $\theta(s)$ が存在する．これを微分して $\det(\gamma', \gamma'') = \theta'$ を得るので $\kappa = \theta'$．

$\gamma'' = \theta'(-\sin\theta, \cos\theta)$

$\boxed{\kappa = \theta'}$

# 問題 1-1 (準備体操)

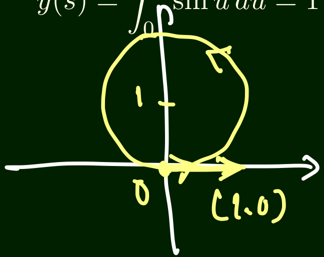
## 問題

平面曲線 $\gamma(s)$ ($s$ は弧長) で曲率が 1 となるものの表示を求めなさい.

$$\kappa(s) = 1,\ \theta(s) = \int_0^s du = s,\ \ \cos\theta(s) = \cos s,\ \ \sin\theta(s) = \sin s,$$

$$x(s) = \int_0^s \cos u\, du = \sin s, \qquad y(s) = \int_0^s \sin u\, du = 1 - \cos s$$

$$\gamma(s) = (\sin s, 1 - \cos s)$$



# 問題 1-1

## 問題

$\gamma_1$ ↓ $\gamma_2$ ↓

平面曲線 $\gamma(s)$ ($s$ は弧長) で曲率が $1/(1+s^2)$, $2/(1+s^2)$ となるものの表示をそれぞれ求めなさい.

$\boxed{\gamma_2 = 2\gamma_1}$

$\frac{1}{2}$

$$\kappa(s) = \frac{1}{1+s^2}, \qquad \theta(s) = \int_0^s \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1} s,$$

$$\cos\theta(s) = \cos\tan^{-1} s = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\tan^{-1} s}} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}},$$

$$\sin\theta(s) = \cos\theta(s)\tan\theta(s) = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}},$$

$$x(s) = \int_0^s \cos\theta(u)\,du = \log\left(s+\sqrt{1+s^2}\right),$$

$$y(s) = \int_0^s \sin\theta(u)\,du = \sqrt{1+s^2} - 1$$

# 問題 1-1 (1)

$\operatorname{sinh}^{-1} s$

$$\kappa(s) = \frac{1}{1+s^2}$$

$$\gamma(s) = (x(s), y(s)) = \left(\log\left(s+\sqrt{1+s^2}\right), \sqrt{1+s^2}-1\right)$$

$\Vert$ $x$ 〃 $y$

- グラフ表示
- $\boxed{\text{懸垂線 catenary.}}$

$$s = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$y = \sqrt{1+\sinh^2 x} - 1 \qquad x = \sinh^{-1} s \qquad s = \sinh x$$

$$= \cosh x - 1 \qquad y = \sqrt{1+s^2} - 1$$

# 問題 1-1 (2)

## 問題

平面曲線 $\gamma(s)$ ($s$ は弧長) で曲率が $1/(1+s^2)$, $2/(1+s^2)$ となるものの表示をそれぞれ求めなさい.

$$\boxed{\frac{2}{1+s^2} - 1}$$

$$\kappa(s) = \frac{2}{1+s^2}, \qquad \theta(s) = \int_0^s \frac{du}{1+u^2} = 2\tan^{-1} s,$$

$$\cos\theta(s) = \cos 2\tan^{-1} s = \frac{1-s^2}{1+s^2},$$

$$\sin\theta(s) = \cos\theta(s)\tan\theta(s) = \frac{2s}{1+s^2},$$

$s = \tan\frac{\theta}{2}$

$\cos\theta =$

$\sin\theta =$

$$x(s) = \int_0^s \cos\theta(u)\,du = 2\tan^{-1} s - s,$$

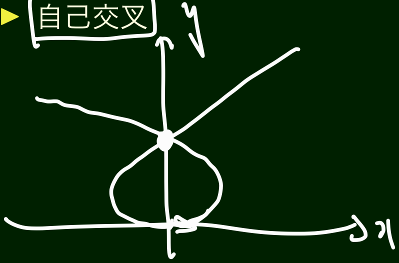
$$y(s) = \int_0^s \sin\theta(u)\,du = \log(1+s^2).$$

$$\kappa(s) = \frac{2}{1+s^2}$$

$$\gamma(s) = \bigl(x(s), y(s)\bigr) = \bigl(\overset{\text{奇}}{\underbrace{2\tan^{-1}s - s}_{x}}, \overset{\text{偶}}{\log(1+s^2)}\bigr)$$

$\log(1+s^2) \geq 0$

- $\boxed{\text{自己交叉}}$




$x \to -\infty$

$s \to +\infty$

$x \to +\infty$

$s \to -\infty$

$\dot{x}(0) = 1 \quad \dot{y}(0) = 0$

# 問題 1-1 補足

$$\kappa(s) = s, \qquad \theta(s) = \frac{s^2}{2}$$

$$\gamma(s) = \left( \int \cos \frac{s^2}{2}\, ds, \int \sin \frac{s^2}{2}\, ds \right)$$

- クロソイド clothoid

Fresnel 積分

# 問題 1-2

## 問題

弧長によりパラメータ付けられた平面曲線 $\gamma(s)$ で，その曲率関数が $a\cos s + b$ ($a$, $b$ は定数) となるものに対して，$\gamma(s+2\pi) = A\gamma(s) + \boldsymbol{a}$ となる $A \in \mathrm{SO}(2)$ と $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ が存在することを認めて，$A$ を $a$, $b$ を用いて具体的に表しなさい．

- 曲率 $\kappa(s)$ が周期 $2\pi$ の関数．
- $\tilde{\gamma}(s) := \gamma(s+2\pi)$ とおくと $\tilde{\gamma}(s)$ の曲率は $\underline{\kappa(s)}$. $\kappa(s+2\pi)$
- 平面曲線の基本定理の一意性から

$$\underline{\gamma(s+2\pi) = \tilde{\gamma}(s) = A\gamma(s) + \boldsymbol{a}} \qquad (A \in \mathrm{SO}(2), \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2)$$

と書ける．

# 問題 1-2

$\gamma' = (\cos\theta, \sin\theta)$ と書けば $\theta' = \kappa$.

$$\theta(s+2\pi) - \theta(s) = \int_s^{s+2\pi} \kappa(u)\,du = 2\pi b,$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta(s+2\pi)) \\ \sin(\theta(s+2\pi)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta(s)+2\pi b) \\ \sin(\theta(s)+2\pi b) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\pi b & -\sin 2\pi b \\ \sin 2\pi b & \cos 2\pi b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta(s) \\ \sin\theta(s) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\gamma'(s+2\pi) = A\gamma'(s)} \qquad \boxed{A := \begin{pmatrix} \cos 2\pi b & -\sin 2\pi b \\ \sin 2\pi b & \cos 2\pi b \end{pmatrix}.}$$

# 問題 1-2

SO(2) の元

$$\gamma'(s+2\pi) = A\gamma'(s) \qquad A := \begin{pmatrix} \cos 2\pi b & -\sin 2\pi b \\ \sin 2\pi b & \cos 2\pi b \end{pmatrix}$$

$$\gamma(s+2\pi) = A\gamma(s) + \boldsymbol{a}.$$

$\hat{\gamma} = P\gamma + q$

$P \in SO(2)$

$\gamma = P^{-1}(\hat{\gamma} - q)$

- $A$ は回転，平行移動によらない．
- $\boldsymbol{a}$ は曲線の「位置」に依存する．
- $A = I$, $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ のとき $\boxed{\gamma(s+2\pi) = \gamma(s)}$ $\boxed{\text{(閉曲線)}}$

$\hat{\gamma}(s+2\pi) = P\gamma(s+2\pi) + q$

$= P(A\gamma(s) + a) + q$

$= P^{-1}AP\hat{\gamma}(s) + ☆$

$\boxed{Pa+q}$

$\boxed{P^{-1}AP = PP^{-1}A = A}$

# 問題 1-2

$\gamma(s+2\pi) = A\gamma(s) + \boldsymbol{a}$.

- $A$ は回転，平行移動によらない.
- $\boldsymbol{a}$ は曲線の「位置」に依存する.
- $A = I$，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ のとき $\gamma(s+2\pi) = \gamma(s)$（閉曲線）