

幾何学概論第一 (MTH.B211)

1: 平面曲線の基本定理 (補足)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2010/10/08

与えられた曲率をもつ平面曲線

パラメータ s が弧長で、曲率が $\kappa(s)$ であるような曲線の構成:

$$\gamma(s) := \int_{s_0}^s (\cos \theta(u), \sin \theta(u)) du, \quad \theta(s) := \int_{s_0}^s \kappa(u) du.$$

Q

 s_0 は何か. A: 任意定数. $\gamma(s_0) = (0, 0)$, $\gamma'(s_0) = (1, 0)$ となる.

Q

この式はどうやったら思いつくのか.

A: $\gamma'(s)$ は単位ベクトルだから $\gamma'(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$ となるような $\theta(s)$ が存在する. これを微分して $\det(\gamma', \gamma'') = \theta'$ を得るので $\kappa = \theta'$.

定理 (平面曲線の基本定理 (テキスト 22 ページ, 定理 2.8))

区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上で定義された C^∞ -級関数 $\kappa: I \ni s \mapsto \kappa(s) \in \mathbb{R}$ に対して、弧長によりパラメータづけられた平面曲線 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ で、曲率関数が $\kappa(s)$ となるものが存在する. さらに、そのような曲線は \mathbb{R}^2 の回転と平行移動で移り合うものを除き唯一である.

定義

正則曲線 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ の曲率 κ を次で定める:

$$\kappa(t) := \frac{\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t))}{|\dot{\gamma}(t)|^3} \quad \left(\cdot = \frac{d}{dt} \right)$$

弧長によりパラメータづけられた曲線 $\gamma(s)$ の曲率は

$$\kappa(s) = \det(\gamma'(s), \gamma''(s)) \quad \left(\cdot = \frac{d}{ds} \right).$$

問題 1-1 (準備体操)

問題

平面曲線 $\gamma(s)$ (s は弧長) で曲率が 1 となるものの表示を求めなさい.

$$\kappa(s) = 1, \quad \theta(s) = \int_0^s du = s, \quad \cos \theta(s) = \cos s, \quad \sin \theta(s) = \sin s,$$

$$x(s) = \int_0^s \cos u du = \sin s, \quad y(s) = \int_0^s \sin u du = 1 - \cos s$$

$$\gamma(s) = (\sin s, 1 - \cos s)$$

問題 1-1

問題

平面曲線 $\gamma(s)$ (s は弧長) で曲率が $1/(1+s^2)$, $2/(1+s^2)$ となるものの表示をそれぞれ求めなさい.

$$\kappa(s) = \frac{1}{1+s^2}, \quad \theta(s) = \int_0^s \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1} s,$$

$$\cos \theta(s) = \cos \tan^{-1} s = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \tan^{-1} s}} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}},$$

$$\sin \theta(s) = \cos \theta(s) \tan \theta(s) = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}},$$

$$x(s) = \int_0^s \cos \theta(u) du = \log(s + \sqrt{1+s^2}),$$

$$y(s) = \int_0^s \sin \theta(u) du = \sqrt{1+s^2} - 1$$

問題 1-1 (1)

$$\kappa(s) = \frac{1}{1+s^2}$$

$$\gamma(s) = (x(s), y(s)) = \left(\log(s + \sqrt{1+s^2}), \sqrt{1+s^2} - 1 \right)$$

▶ グラフ表示

▶ 懸垂線 catenary.

問題 1-1 (2)

問題

平面曲線 $\gamma(s)$ (s は弧長) で曲率が $1/(1+s^2)$, $2/(1+s^2)$ となるものの表示をそれぞれ求めなさい.

$$\kappa(s) = \frac{2}{1+s^2}, \quad \theta(s) = \int_0^s \frac{du}{1+u^2} = 2 \tan^{-1} s,$$

$$\cos \theta(s) = \cos 2 \tan^{-1} s = \frac{1-s^2}{1+s^2},$$

$$\sin \theta(s) = \cos \theta(s) \tan \theta(s) = \frac{2s}{1+s^2},$$

$$x(s) = \int_0^s \cos \theta(u) du = 2 \tan^{-1} s - s,$$

$$y(s) = \int_0^s \sin \theta(u) du = \log(1+s^2).$$

問題 1-1 (2)

$$\kappa(s) = \frac{2}{1+s^2}$$

$$\gamma(s) = (x(s), y(s)) = (2 \tan^{-1} s - s, \log(1+s^2))$$

▶ 自己交叉

$$\kappa(s) = s, \quad \theta(s) = \frac{s^2}{2}$$

$$\gamma(s) = \left(\int \cos \frac{s^2}{2} ds, \int \sin \frac{s^2}{2} ds \right)$$

▶ クロソイド clothoid

問題

弧長によりパラメータ付けられた平面曲線 $\gamma(s)$ で、その曲率関数が $a \cos s + b$ (a, b は定数) となるものに対して、 $\gamma(s + 2\pi) = A\gamma(s) + \mathbf{a}$ となる $A \in \text{SO}(2)$ と $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ が存在することを認めて、 A を a, b を用いて具体的に表しなさい。

- ▶ 曲率 $\kappa(s)$ が周期 2π の関数。
- ▶ $\tilde{\gamma}(s) := \gamma(s + 2\pi)$ とおくと $\tilde{\gamma}(s)$ の曲率は $\kappa(s)$ 。
- ▶ 平面曲線の基本定理の一意性から

$$\gamma(s + 2\pi) = \tilde{\gamma}(s) = A\gamma(s) + \mathbf{a} \quad (A \in \text{SO}(2), \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2)$$

と書ける。

問題 1-2

$\gamma' = (\cos \theta, \sin \theta)$ と書けば $\theta' = \kappa$ 。

$$\theta(s + 2\pi) - \theta(s) = \int_s^{s+2\pi} \kappa(u) du = 2\pi b,$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta(s + 2\pi)) \\ \sin(\theta(s + 2\pi)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta(s) + 2\pi b) \\ \sin(\theta(s) + 2\pi b) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\pi b & -\sin 2\pi b \\ \sin 2\pi b & \cos 2\pi b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta(s) \\ \sin \theta(s) \end{pmatrix}$$

$$\gamma'(s + 2\pi) = A\gamma'(s) \quad A := \begin{pmatrix} \cos 2\pi b & -\sin 2\pi b \\ \sin 2\pi b & \cos 2\pi b \end{pmatrix}.$$

問題 1-2

$$\gamma'(s + 2\pi) = A\gamma'(s) \quad A := \begin{pmatrix} \cos 2\pi b & -\sin 2\pi b \\ \sin 2\pi b & \cos 2\pi b \end{pmatrix}$$

$$\gamma(s + 2\pi) = A\gamma(s) + \mathbf{a}.$$

- ▶ A は回転，平行移動によらない。
- ▶ \mathbf{a} は曲線の「位置」に依存する。
- ▶ $A = I, \mathbf{a} = \mathbf{0}$ のとき $\gamma(s + 2\pi) = \gamma(s)$ (閉曲線)

問題 1-2

$\gamma(s + 2\pi) = A\gamma(s) + \mathbf{a}$.

- ▶ A は回転，平行移動によらない。
- ▶ \mathbf{a} は曲線の「位置」に依存する。
- ▶ $A = I, \mathbf{a} = \mathbf{0}$ のとき $\gamma(s + 2\pi) = \gamma(s)$ (閉曲線)