幾何学概論第一 (MTH.B211)

2: パラメータ変換と弧長

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2010/10/08

目標

γ, $\tilde{\gamma} = \underline{A\gamma + a}$ $A \in SO(2)$

定理 (曲率の不変性)

$\Rightarrow \kappa = \tilde{\kappa}$

正則曲線 $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ の曲率

$$\kappa(t) := \frac{\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t))}{|\dot{\gamma}(t)|^3} \qquad \left(\cdot = \frac{d}{dt}\right)$$

はパラメータのとり方によらない

定理

正則にパラメータ付けられた曲線は，パラメータ変換により弧長パラメータで表示できる．

パラメータ変換

定義

パラメータ表示された曲線 $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ と $\tilde{\gamma}\colon \widetilde{I} \to \mathbb{R}^n$ に対して,

$\tilde{\gamma}$ が γ からパラメータ変換で得られる

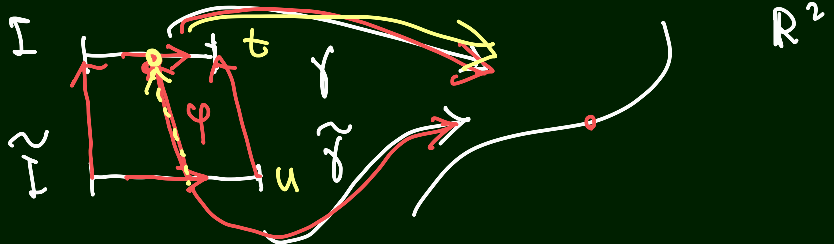
とは，C^∞-級全単射 $\varphi\colon \widetilde{I} \to I$ で

$t = \varphi(u)$

$$\frac{d\varphi}{du} > 0 \quad (\text{on } \widetilde{I}), \qquad \underline{\tilde{\gamma}(u) = \gamma\bigl(\varphi(u)\bigr)}$$

パラメータ変換

を満たすものが存在すること.



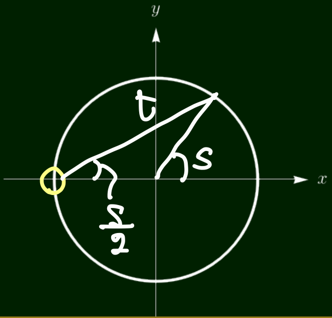
パラメータ変換（例）

例

$I = (-\pi, \pi)$, $\widetilde{I} = \mathbb{R}$ として，$\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$, $\tilde{\gamma}\colon \widetilde{I} \to \mathbb{R}^2$ を

$$\underline{\gamma(s) := (\cos s, \sin s)}, \qquad \underline{\tilde{\gamma}(t) := \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)}$$

で定めると $\tilde{\gamma}$ は γ からパラメータ変換で得られる．



$t = \tan\frac{s}{2} \qquad s = 2\tan^{-1} t$

$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(2\tan^{-1} t)$

パラメータ変換（例）

例

$I = \widetilde{I} = \hat{I} = \mathbb{R}$,

$$\gamma(s) := (s, 0), \qquad \tilde{\gamma}(t) := (\sinh t, 0), \qquad \hat{\gamma}(u) := (u^3, 0)$$

とおくと，$\tilde{\gamma}$ は γ からパラメータ変換で得られるが $\hat{\gamma}$ はそうではない．

・ $s = \sinh t$ $\quad \frac{ds}{dt} = \cosh t \geq 1 > 0$

$t = \sinh^{-1} s$

$= \log \cdots$

・ $s = u^3$ $\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1 to 1 onto

$u = \sqrt[3]{s}$

・ $\left.\frac{ds}{du}\right|_{u=0} = 0$

パラメータ変換

補題

1. 「パラメータ変換で得られる曲線である」という関係は同値関係である.
2. パラメータ付けられた曲線 γ からパラメータ変換で得られる曲線 $\tilde{\gamma}$ の像は γ の像と一致する.
3. 正則にパラメータづけられた曲線 γ からパラメータ変換で得られる曲線 $\tilde{\gamma}$ はまた正則である.

パラメータ変換

補題

3. 正則にパラメータづけられた曲線 γ からパラメータ変換で得られる曲線 $\tilde{\gamma}$ はまた正則である.

$$\tilde{\gamma}(u) = \gamma(\overset{t}{\overset{\shortparallel}{\varphi(u)}})$$

$$\frac{dt}{du}\frac{d\gamma}{dt}$$

$$\underset{\neq 0}{\frac{d\tilde{\gamma}}{du}(u)} = \overset{\neq 0}{\frac{d\varphi}{du}}(u)\overset{\neq 0}{\frac{d\gamma}{dt}}\Bigg|_{t=\varphi(u)}$$

$$\underbrace{\text{Chain rule}}$$

曲率の不変性

- 曲率は回転と平行移動で変わらない（第 1 回講義）

定理 (曲率の不変性)

正則曲線 $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ の曲率

$$\kappa(t) := \frac{\det(\dot\gamma(t), \ddot\gamma(t))}{|\dot\gamma(t)|^3} \qquad \left(\cdot = \frac{d}{dt}\right)$$

はパラメータのとり方によらない.

命題

正則曲線 $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ と C^∞-級関数 $\varphi\colon \widetilde{I} \to I$（$\varphi' > 0$）を用いて $\tilde\gamma(u) := \gamma(\varphi(u))$ と定めるとき,

$$\frac{\det\left(\tilde\gamma'(u), \tilde\gamma''(u)\right)}{|\tilde\gamma'(u)|^3} = \left.\frac{\det\left(\dot\gamma(t), \ddot\gamma(t)\right)}{|\dot\gamma(t)|^3}\right|_{t=\varphi(u)} \quad \left({}' = \frac{d}{du}, \ {}^{\cdot} = \frac{d}{dt}\right).$$

曲率の不変性

命題

正則曲線 $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ と C^∞-級関数 $\varphi\colon \widetilde{I} \to I$（$\varphi' > 0$）を用いて $\tilde{\gamma}(u) := \gamma(\varphi(u))$ と定めるとき，

$$\frac{\det(\tilde{\gamma}'(u), \tilde{\gamma}''(u))}{|\tilde{\gamma}'(u)|^3} = \left.\frac{\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t))}{|\dot{\gamma}(t)|^3}\right|_{t=\varphi(u)} \qquad \left({}' = \frac{d}{du}, \ \dot{} = \frac{d}{dt} \right).$$

>0

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{du} = \frac{dt}{du}\frac{d\gamma}{dt} \qquad t=\varphi(u)$$

$$\frac{d^2\tilde{\gamma}}{du^2} = \frac{d^2t}{du^2}\frac{d\gamma}{dt} + \left(\frac{dt}{du}\right)^2\frac{d^2\gamma}{dt^2}$$

関数のグラフの曲率

例

γ

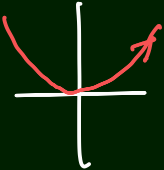
関数 $f(x)$ のグラフは $x \mapsto (x, f(x))$ とパラメータ表示される．
この曲率は

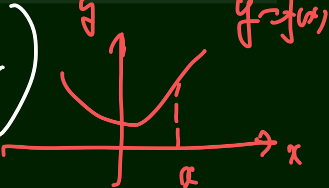
$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}^3}.$$

$f = 0$

とくに $x = 0$ でグラフが x 軸に接するなら $\kappa(0) = f''(0)$.

$$\gamma' = \begin{pmatrix} 1 \\ f' \end{pmatrix} \qquad \gamma'' = \begin{pmatrix} 0 \\ f'' \end{pmatrix}$$



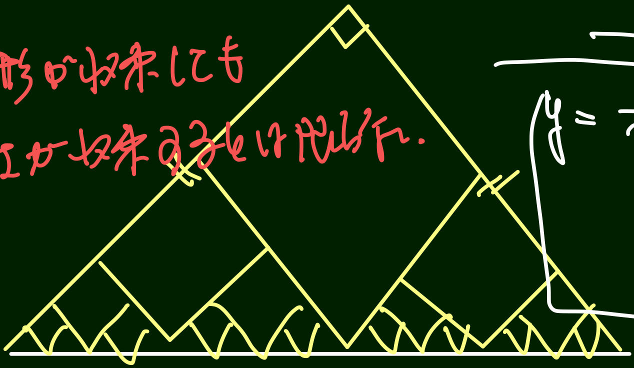


$\kappa(0) = f''(0)$

曲線の弧長

$\sqrt{2} = 1$:

図形が収束しても
長さが収束するとは限らない.



$- \sqrt{2}$

$- 1$

$y = \frac{1}{n} \sin nx$

$n \to \infty$

$y = 0$

0 $\qquad$ 1

曲線の弧長

定義

C^∞

パラメータ付けられた曲線 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ の弧長を次で定める:

$$\mathcal{L}(\gamma) := \int_a^b \underbrace{|\dot\gamma(t)|}_{\text{速さ}}\, dt.$$

みはび

命題

曲線の弧長はパラメータのとり方によらない.

$$\left|\frac{d\gamma}{dt}\right| dt = \left|\frac{du}{dt}\frac{d\gamma}{du}\right| dt$$

$$= \frac{du}{dt}\left|\frac{d\gamma}{du}\right| dt$$

曲線の弧長

事実

写像 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ と区間 $[a,b]$ の分割 $\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ に対して

$$\mathcal{L}_\Delta := \sum_{j=1}^{n} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|$$

と定める．このとき γ が C^1-級ならば

$$\mathcal{L}(\gamma) = \sup_{\Delta\colon [a,b] \text{ の分割}} \mathcal{L}_\Delta .$$

- γ が $y = f(x)$ のグラフならば平均値の定理と f' の連続性から示せる．

弧長パラメータ

定理

正則にパラメータ付けられた曲線は，パラメータ変換により弧長パラメータで表示できる．

証明．

正則曲線 $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ に対して，$t_0 \in I$ をひとつ固定して

$$S = \psi(t) := \int_{t_0}^{t} |\dot\gamma(u)|\,du$$

と定めると，ψ は単調増加関数なので逆関数 φ が存在する．これをもちいて

$\dot\psi = |\dot\gamma| > 0$

$$\tilde\gamma(s) = \gamma\bigl(\varphi(s)\bigr)$$

とおけばよい． □

例題

問題 (例題)

曲線 $\gamma(t) := (\operatorname{sech} t, t - \tanh t)$ を弧長パラメータに変換しなさい.

$$\dot{\gamma} = (\operatorname{sech} t \tanh t, 1 - 1 + \tanh^2 t)$$

$$= \tanh t (\operatorname{sech} t, \tanh t)$$

$(0, \infty)$

$$|\dot{\gamma}| = \tanh t$$

$t = 0$ で正則でない

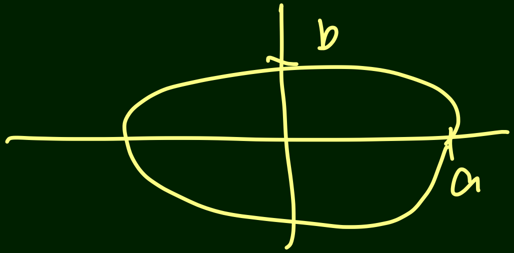
$$s = \psi(t) = \log \cosh t$$

$$t = \cosh^{-1} e^s = \log\left(e^s + \sqrt{e^{2s} - 1}\right)$$

問題 2-1

問題

長軸の長さが $2a$，短軸の長さが $2b$（$a, b > 0$）である楕円 $\gamma_{a,b}(t) = (a\cos t, b\sin t)$ $(-\pi \leq t \leq \pi)$ の弧長を $\mathcal{L}(a, b)$ とする．とくに $a + b = 1$ のとき，$\mathcal{L}(a, 1 - a)$ が最小値をとるのはどんなときか．



問題 2-2

問題

パラメータ表示（正則とは限らない）された曲線 $\gamma(t)$ の点 $t=t_0$（$\gamma(t_0)$）での性質

$$\dot{\gamma}(t_0)=\mathbf{0},\quad \det\bigl(\ddot{\gamma}(t_0),\dddot{\gamma}(t_0)\bigr)\neq 0 \qquad \left(\cdot=\frac{d}{dt}\right)$$

はパラメータのとり方によらないことを示しなさい.