

幾何学概論第一 (MTH.B211)

2: パラメータ変換と弧長

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2010/10/08

定理 (曲率の不変性)

正則曲線 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ の曲率

$$\kappa(t) := \frac{\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t))}{|\dot{\gamma}(t)|^3} \quad \left(\cdot = \frac{d}{dt} \right)$$

はパラメータのとり方によらない。

定理

正則にパラメータ付けられた曲線は、パラメータ変換により弧長パラメータで表示できる。

パラメータ変換

定義

パラメータ表示された曲線 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ と $\tilde{\gamma}: \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ に対して、 $\tilde{\gamma}$ が γ からパラメータ変換で得られる

とは、 C^∞ -級全単射 $\varphi: \tilde{I} \rightarrow I$ で

$$\frac{d\varphi}{du} > 0 \quad (\text{on } \tilde{I}), \quad \tilde{\gamma}(u) = \gamma(\varphi(u))$$

を満たすものが存在すること。

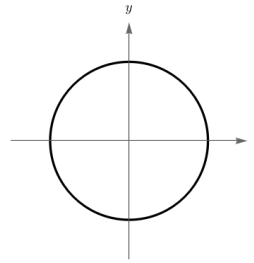
パラメータ変換 (例)

例

$I = (-\pi, \pi)$, $\tilde{I} = \mathbb{R}$ として、 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\tilde{\gamma}: \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$\gamma(s) := (\cos s, \sin s), \quad \tilde{\gamma}(t) := \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)$$

で定めると $\tilde{\gamma}$ は γ からパラメータ変換で得られる。



パラメータ変換 (例)

例

$I = \tilde{I} = \hat{I} = \mathbb{R}$,

$$\gamma(s) := (s, 0), \quad \tilde{\gamma}(t) := (\sinh t, 0), \quad \hat{\gamma}(u) := (u^3, 0)$$

とおくと、 $\tilde{\gamma}$ は γ からパラメータ変換で得られるが $\hat{\gamma}$ はそうではない。

パラメータ変換

補題

- 「パラメータ変換で得られる曲線である」という関係は同値関係である。
- パラメータ付けられた曲線 γ からパラメータ変換で得られる曲線 $\tilde{\gamma}$ の像は γ の像と一致する。
- 正則にパラメータづけられた曲線 γ からパラメータ変換で得られる曲線 $\tilde{\gamma}$ はまた正則である。

パラメータ変換

補題

- 正則にパラメータづけられた曲線 γ からパラメータ変換で得られる曲線 $\tilde{\gamma}$ はまた正則である。

曲率の不変性

- ▶ 曲率は回転と平行移動で変わらない (第1回講義)

定理 (曲率の不変性)

正則曲線 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ の曲率

$$\kappa(t) := \frac{\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t))}{|\dot{\gamma}(t)|^3} \quad \left(\cdot = \frac{d}{dt} \right)$$

はパラメータのとり方によらない。

命題

正則曲線 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ と C^∞ -級関数 $\varphi: \tilde{I} \rightarrow I$ ($\varphi' > 0$) を用いて $\tilde{\gamma}(u) := \gamma(\varphi(u))$ と定めるとき、

$$\frac{\det(\tilde{\gamma}'(u), \tilde{\gamma}''(u))}{|\tilde{\gamma}'(u)|^3} = \frac{\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t))}{|\dot{\gamma}(t)|^3} \Big|_{t=\varphi(u)} \quad \left(\cdot' = \frac{d}{du}, \cdot = \frac{d}{dt} \right).$$

命題

正則曲線 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ と C^∞ -級関数 $\varphi: \tilde{I} \rightarrow I$ ($\varphi' > 0$) を用いて $\tilde{\gamma}(u) := \gamma(\varphi(u))$ と定めるとき,

$$\frac{\det(\tilde{\gamma}'(u), \tilde{\gamma}''(u))}{|\tilde{\gamma}'(u)|^3} = \frac{\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t))}{|\dot{\gamma}(t)|^3} \Big|_{t=\varphi(u)} \left(\cdot' = \frac{d}{du}, \cdot = \frac{d}{dt} \right).$$

例

関数 $f(x)$ のグラフは $x \mapsto (x, f(x))$ とパラメータ表示される。この曲率は

$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}^3}.$$

とくに $x = 0$ でグラフが x 軸に接するなら $\kappa(0) = f''(0)$ 。

曲線の弧長

$$\sqrt{2} = 1 :$$

曲線の弧長

定義

パラメータ付けられた曲線 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ の弧長を次で定める:

$$\mathcal{L}(\gamma) := \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

命題

曲線の弧長はパラメータのとり方によらない。

曲線の弧長

事実

写像 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ と区間 $[a, b]$ の分割 $\Delta: a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ に対して

$$\mathcal{L}_\Delta := \sum_{j=1}^n |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|$$

と定める。このとき γ が C^1 -級ならば

$$\mathcal{L}(\gamma) = \sup_{\Delta: [a, b] \text{ の分割}} \mathcal{L}_\Delta.$$

▶ γ が $y = f(x)$ のグラフならば平均値の定理と f' の連続性から示せる。

弧長パラメータ

定理

正則にパラメータ付けられた曲線は、パラメータ変換により弧長パラメータで表示できる。

証明.

正則曲線 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ に対して、 $t_0 \in I$ をひとつ固定して

$$\psi(t) := \int_{t_0}^t |\dot{\gamma}(u)| du$$

と定めると、 ψ は単調増加関数なので逆関数 φ が存在する。これをもちいて

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(\varphi(s))$$

とおけばよい。 □

例題

問題 (例題)

曲線 $\gamma(t) := (\operatorname{sech} t, t - \tanh t)$ を弧長パラメータに変換しなさい。

問題 2-1

問題

長軸の長さが $2a$ 、短軸の長さが $2b$ ($a, b > 0$) である楕円 $\gamma_{a,b}(t) = (a \cos t, b \sin t)$ ($-\pi \leq t \leq \pi$) の弧長を $\mathcal{L}(a, b)$ とする。とくに $a + b = 1$ のとき、 $\mathcal{L}(a, 1 - a)$ が最小値をとるのはどんなときか。

問題 2-2

問題

パラメータ表示 (正則とは限らない) された曲線 $\gamma(t)$ の点 $t = t_0$ ($\gamma(t_0)$) での性質

$$\dot{\gamma}(t_0) = \mathbf{0}, \quad \det(\ddot{\gamma}(t_0), \ddot{\gamma}(t_0)) \neq 0 \quad \left(\cdot = \frac{d}{dt} \right)$$

はパラメータのとり方によらないことを示しなさい。