幾何学概論第一 (MTH.B211)

2: パラメータ変換と弧長

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2010/10/08

目標

定理 (曲率の不変性)

正則曲線 $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ の曲率

$$\kappa(t) := \frac{\det(\dot\gamma(t), \ddot\gamma(t))}{|\dot\gamma(t)|^3} \qquad \left(\dot{} = \frac{d}{dt}\right)$$

はパラメータのとり方によらない．

定理

正則にパラメータ付けられた曲線は，パラメータ変換により弧長パラメータで表示できる．

パラメータ変換

定義

パラメータ表示された曲線 $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ と $\tilde\gamma\colon \widetilde{I} \to \mathbb{R}^n$ に対して，
$\tilde\gamma$ が γ からパラメータ変換で得られる

とは，C^∞-級全単射 $\varphi\colon \widetilde{I} \to I$ で

$$\frac{d\varphi}{du} > 0 \quad (\text{on } \widetilde{I}), \qquad \tilde\gamma(u) = \gamma\bigl(\varphi(u)\bigr)$$

を満たすものが存在すること．

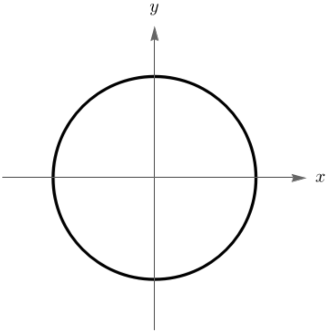
パラメータ変換（例）

例

$I=(-\pi,\pi)$，$\widetilde{I}=\mathbb{R}$ として，$\gamma\colon I\to\mathbb{R}^2$，$\tilde{\gamma}\colon\widetilde{I}\to\mathbb{R}^2$ を

$$\gamma(s):=(\cos s,\sin s),\qquad \tilde{\gamma}(t):=\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)$$

で定めると $\tilde{\gamma}$ は γ からパラメータ変換で得られる．



パラメータ変換（例）

例

$I = \widetilde{I} = \hat{I} = \mathbb{R}$，

$$\gamma(s) := (s, 0), \qquad \tilde{\gamma}(t) := (\sinh t, 0), \qquad \hat{\gamma}(u) := (u^3, 0)$$

とおくと，$\tilde{\gamma}$ は γ からパラメータ変換で得られるが $\hat{\gamma}$ はそうではない．

パラメータ変換

補題

1. 「パラメータ変換で得られる曲線である」という関係は同値関係である．
2. パラメータ付けられた曲線 γ からパラメータ変換で得られる曲線 $\tilde{\gamma}$ の像は γ の像と一致する．
3. 正則にパラメータづけられた曲線 γ からパラメータ変換で得られる曲線 $\tilde{\gamma}$ はまた正則である．

パラメータ変換

補題

3. **正則にパラメータづけられた曲線 γ からパラメータ変換で得られる曲線 $\tilde{\gamma}$ はまた正則である.**

曲率の不変性

- 曲率は回転と平行移動で変わらない（第 1 回講義）

定理 (曲率の不変性)

正則曲線 $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ の曲率

$$\kappa(t) := \frac{\det(\dot\gamma(t), \ddot\gamma(t))}{|\dot\gamma(t)|^3} \qquad \left(\cdot = \frac{d}{dt}\right)$$

はパラメータのとり方によらない．

命題

正則曲線 $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ と C^∞-級関数 $\varphi\colon \widetilde{I} \to I$（$\varphi' > 0$）を用いて $\tilde\gamma(u) := \gamma(\varphi(u))$ と定めるとき，

$$\frac{\det\left(\tilde\gamma'(u), \tilde\gamma''(u)\right)}{|\tilde\gamma'(u)|^3} = \left.\frac{\det\left(\dot\gamma(t), \ddot\gamma(t)\right)}{|\dot\gamma(t)|^3}\right|_{t=\varphi(u)} \quad \left({}' = \frac{d}{du}, \ \cdot = \frac{d}{dt}\right).$$

曲率の不変性

命題

正則曲線 $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ **と** C^∞**-級関数** $\varphi\colon \widetilde{I} \to I$ **（**$\varphi' > 0$**）を用いて** $\tilde{\gamma}(u) := \gamma(\varphi(u))$ **と定めるとき，**

$$\frac{\det\left(\tilde{\gamma}'(u), \tilde{\gamma}''(u)\right)}{|\tilde{\gamma}'(u)|^3} = \left.\frac{\det\left(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)\right)}{|\dot{\gamma}(t)|^3}\right|_{t=\varphi(u)} \quad \left({}' = \frac{d}{du}, \ \cdot = \frac{d}{dt}\right).$$

関数のグラフの曲率

例

関数 $f(x)$ **のグラフは** $x \mapsto \bigl(x, f(x)\bigr)$ **とパラメータ表示される．この曲率は**

$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}^3}.$$

とくに $x = 0$ **でグラフが** x **軸に接するなら** $\kappa(0) = f''(0)$**．**

曲線の弧長

$\sqrt{2} = 1$：

曲線の弧長

定義

パラメータ付けられた曲線 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ の弧長を次で定める：

$$\mathcal{L}(\gamma) := \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\,dt.$$

命題

曲線の弧長はパラメータのとり方によらない．

曲線の弧長

事実

写像 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ **と区間** $[a,b]$ **の分割**
$\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ **に対して**

$$\mathcal{L}_\Delta := \sum_{j=1}^{n} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|$$

と定める．このとき γ **が** C^1**-級ならば**

$$\mathcal{L}(\gamma) = \sup_{\Delta\colon [a,b] \text{ の分割}} \mathcal{L}_\Delta.$$

- γ **が** $y = f(x)$ **のグラフならば平均値の定理と** f' **の連続性から示せる．**

弧長パラメータ

定理

正則にパラメータ付けられた曲線は，パラメータ変換により弧長パラメータで表示できる．

証明.

正則曲線 $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ **に対して，** $t_0 \in I$ **をひとつ固定して**

$$\psi(t) := \int_{t_0}^{t} |\dot\gamma(u)|\,du$$

と定めると， ψ **は単調増加関数なので逆関数** φ **が存在する．これをもちいて**

$$\tilde\gamma(s) = \gamma\bigl(\varphi(s)\bigr)$$

とおけばよい． □

例題

問題 (例題)

曲線 $\gamma(t) := (\operatorname{sech} t, t - \tanh t)$ **を弧長パラメータに変換しなさい．**

問題 2-1

問題

長軸の長さが $2a$**，短軸の長さが** $2b$（$a, b > 0$）**である楕円** $\gamma_{a,b}(t) = (a\cos t, b\sin t)$ $(-\pi \le t \le \pi)$ **の弧長を** $\mathcal{L}(a,b)$ **とする．とくに** $a + b = 1$ **のとき，**$\mathcal{L}(a, 1-a)$ **が最小値をとるのはどんなときか．**

問題 2-2

問題

パラメータ表示（正則とは限らない）された曲線 $\gamma(t)$ の点 $t=t_0$（$\gamma(t_0)$）での性質

$$\dot\gamma(t_0)=\mathbf{0},\qquad \det\bigl(\ddot\gamma(t_0),\dddot\gamma(t_0)\bigr)\neq 0 \qquad \left(\cdot=\frac{d}{dt}\right)$$

はパラメータのとり方によらないことを示しなさい．