2020 年 10 月 8 日 (2020 年 10 月 15 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一（MTH.B211）講義資料 2

■前回までの訂正

- 第 2 回講義のタイトルを変更：「曲線のパラメータ表示と弧長」⇒ 「パラメータ変換と弧長」
- 映写資料の日付：2010 ⇒ 2020
- 講義資料 1，1 ページ，下から 4 行目；2020/10/01 映写資料 A，5 ページ；成績の定義式：$5A \times \left[\frac{z}{5}\right] \Rightarrow 5 \times \left[A \times \frac{z}{5}\right]$.
- 講義資料 1，脚注*4：このことを. . . ⇒ このことと行列の積が結合法則をみたすことを合わせ，$\mathrm{O}(n)$，$\mathrm{SO}(n)$ は**群をなす**.
- 講義資料 1，4 ページ，5 行目：$t \in I$ で成り立つ ⇒ すべての $t \in I$ で成り立つ
- 2020/10/01 映写資料 B，5 ページ への講義中の書き込み：Schwartz ⇒ Schwarz
- 2020/10/01 映写資料 B，5 ページ；$\mathrm{SO}(n) := \{A \in \mathrm{SO}(n)\,;\, \det A = 1\} \Rightarrow \mathrm{SO}(n) := \{A \in \mathrm{O}(n)\,;\, \det A = 1\}$
- 2020/10/01 映写資料 B，8 ページ への講義中の書き込み：$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\theta) \\ \sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} r\cos(\alpha+\theta) \\ r\sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix}$
- 2020/10/01 映写資料 C，7 ページ：$\gamma(t) = (\operatorname{sech} u, \tanh u) \Rightarrow \gamma(u) = (\operatorname{sech} u, \tanh u)$
- 2020/10/01 映写資料 C，12 ページあたり，定曲率 1 の曲線の計算の説明で $\int_0^s \sin u\, du = -\cos s - 1 \Rightarrow -\cos s + 1$.
- ご指摘：「重箱の隅をつつくようで申し訳ないのですが，映写資料の中の “パラメータ付ける” の付けるの部分が感じとひらがなと混存（原文ママ：混在？）していたので統一した方がいいと思います.」おっしゃるとおり．今回は個別の修正はしません.

■授業に関する御意見

- 授業スピードが少し速くて追いつくのが必死でした．予習をして臨みたいと思います．よろしくお願いします． / 授業が少し早く，ききながらじっくり考えてしまって追いつけなかった部分もいくつかあったので，少しゆっくりめに授業を進めていただけるとうれしいです． / 授業のスピードが少し早いように感じた． / 先生のペースが普段からそうなのか，スライドを用いているからなのか分かりませんが，進みが少しはやいです． / すこしはやくてついていけないところがあったので，ゆっくりはなしてほしい． / かなり早いと感じました．スライドをつかうと教員の板書時間が減る，一面に表示できる量が減り，次にいくときに前のページがすぐ消えるなどの理由で早くなるのでゆっくりやってほしい．書き込んだスライドの共有は助かるのでレコーディングを共有する次回以降もやってほしいです． / 授業中に書き込んだ講義資料を次回以降もアップロードしてほしいです． **山田のコメント：** Sorry．実は板書でも早いんです．アップロードはしてみます.
- スライドに書き込む際の文字をもう少し細くしていただけると助かります． **山田のコメント：** なるほど．やって見ます.
- 人の事言えないんですけど文字が読めませんでした． **山田のコメント：** ごめん.
- 黒板風の背景はとても見やすかったのですが，講義概要のスライドは暗い背景に黒字でみづらかったです．また，両サイドに暗くなっていない部分があったため，余計に明暗が際立って逆効果になっていました． **山田のコメント：** 前景色を変えます．両サイドの件はウインドウのサイズ，ディスプレイの設定でどうにかなりませんか？
- ちょっと速かったが，自分的にはあれくらいの方が集中せざるを得ないので良いと思った.「講議」と今まで書いて生きていました．でもこっちのほうが言偏が多く，“Lecture” 感があって良いと思います． **山田のコメント：** とはいっても誤字は誤字． ● スライドの余白に書き込めるよう余白を大きくしてほしいです． **山田のコメント：** どれくらい？スライドの半分くらい？
- はじめてタブレットに書き込んで課題を提出してみたのですが，背景が白いと文字の大きさが分からなくなってしまうので，罫線のあるバージョンを作っていただくことは可能ですか？また，今回のレポートが見づらいと感じられるようでしたら，印刷して紙に書くやり方に変更しようと思うので，教えていただけたらと思います． / この提出フォーマットの docx 版を公開して欲しいです．私の環境のせいかもしれませんが，pdf の貼り付けがうまく行かずワードでの回答作成ができなかったためです． **山田のコメント：** 罫線付用紙，docx は是非作って公開してください.
- LATEX のコードがもらえてうれしいです． / LaTeX のソースを hack して書いてみました．第一回目の授業についてですが，まだ初歩的な内容だったのでついていくことができましたが，以降の授業も同じペースで進めると追いつけるかどうか心配です． **山田のコメント：** LATEX 使ってくれる人がいてよかった．授業は段々遅くなる？
- 課題の返却および解説は行いますか？また課題の得点はどのように知ることができますか？ **山田のコメント：** 返却します.
- はじめに目標とする定理が上げられていたためゴールがはっきりしてよかったです． **山田のコメント：** はい.
- 久しぶりの積分で大変です． **山田のコメント：** そうなの?（びっくり） ● 曲率という概念は，微分係数のように座標によらないのでおもしろそう． **山田のコメント：** はい.
- 大学で学ぶ幾何学というのがかなりわかりづらく抽象度が高いものというイメージがありましたが，初回の講義はわかりやすく安心しました．これからも頑張ってついていきたいです． **山田：** なるほど.
- オンライン授業で大変だと思いますが山田先生の授業楽しみにしております．3Q よろしくお願いします． **山田のコメント：** こちらこそ.

■質問と回答

質問 1： 映写資料 B の p 9 で（略）${}^tPAP =$（略，第一列が ${}^t(1,0,0)$）で，この ${}^tPAP$ は x 軸周りの回転と考えることができると思うのですが，同様に y, z 軸周りの回転を考えた時の ${}^tPAP = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$, ${}^tPAP = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ という形にする変形も可能ですか? 直観的には可能だと思っています. **お答え：**A の 1-固有ベクトルを P のどの列にもってくるか.

質問 2： $A \in \mathrm{SO}(3)$ が常に 1 を固有値にもつ理由は (1) λ が A の固有値 ⇒ $|\lambda| = 1$，(2) λ が A の固有値 ⇒ $\bar{\lambda}$ も A の固有値 (3) A の固有値の積は $\det A = 1$ に等しい．(4) $\det(tE - A) = 0$ の解が全て実数なら (1) と (3) から A は 1 を固有値にもつ．(5) . . . の解のうち 1 つが実数，残りが虚数の場合も (1), (2), (3) から A は 1 を固有値にもつ．だと思っているのですが，この議論は正しいでしょうか．またこれよりも簡単な説明方法があれば教えて頂きたいです. **お答え：**はい，これで結構です.

質問 3： $\mathbb{R}^n$ の等長変換 φ は（略：講義資料 3 ページ, 下から 3 行目の定理）について, 授業内の先生のヒントから $\psi(\boldsymbol{x}) := \varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{0})$ として ψ が線型変換であることを示し，ψ の表現行列 A を用いることで $A\boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{0})$ i.e. $\varphi(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$ という流れで証明しようとしました．しかし，途中で $A \in \mathrm{O}(2)$ に絞れないことに気づき，行き詰まってしまいました．$A \in \mathrm{O}(2)$ という条件が絡んでくるのは何故なのか，ご説明いただけると幸いです. **お答え：**$|\psi(\boldsymbol{x})| = |\boldsymbol{x}|$.

質問 4： 等長変換全体は写像の合成に関して群を成すことから等長変換は全単射であることが必要であると思うのですが，それは等長変換の定義に含めなくて良いのですか？ **お答え：**実は全単射であることは等長性から示せます.

質問 5： 等長変換全体の集合が合成に関して群をなすことの証明で，逆元が存在することの証明のために等長変換が全単射であることを示したかったのですが，全射性が示せませんでした. **お答え：**ごもっとも (1) 等長変換 $\varphi(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$ の逆写像は $\psi(\boldsymbol{y}) = A^{-1}\boldsymbol{y} - A^{-1}\boldsymbol{a}$；(2) 等長変換の連続性を使って定義から全射性を示す；(3) 等長変換の定義に全単射性を含めるなど.

質問 6： 『正則な点の近くでは曲線が「なめらか」である』とありましたが,「なめらか」とはどういうことですか？/ 授業ででてきた「なめらか」とは何回も微分可能という意味でしょうか？ **お答え：**今回少しやります.

質問 7： $\gamma(t) = (t, |t|)$, $\dot{\gamma}(t) \neq \boldsymbol{0}$ となっていますが $t = 0$ でなめらかもしくは正則であると言いますか? **お答え：**$\dot{\gamma}(0)$ は存在しない.

質問 8： 「なめらかな図形でも正則でないパラメータ表示ができる」という部分で $\gamma(t) = (t^3, 0)$ のような例が挙がっていたが，この $\gamma(t)$ についての質問です．$\gamma_*(t) = (t, 0)$ を考えるとこれも同じような直線を表すと思いますが，これは（中略）$t = 0$ で正則

となる．このとき $\gamma(t)$ と $\gamma_*(t)$ はどちらも直線だが同じ図形なのかどうか，ということについてです．直観的には一対一対応がとれるとはいえ，密度のようなものが違いそうだと思います．それに，曲率を考えられるかどうかも違うと思います．ですが，各点の一対一対応もとれて同じ平面に描くと重なることを考えると腑に落ちません．どのように考えるべきなのでしょうか．

お答え： 「同じ図形」の意味によると思います．ここでは「γ と γ_* の像が（$\mathbb{R}^2$ の部分集合として）一致する」．

質問 9： 授業のスライドでは，平面曲線の基本定理において（略：$\int_{s_0}^{s}\dots$）となっていますが，山田先生の著書『曲線と曲面』 p. 23 では $s_0=0$ となっています．この違いは何によって生じるものでしょうか． **お答え：** テキストでは κ の定義域が $[0,l]$.

質問 10： 平面曲線の基本定理における s_0 がどのような意味をもつのでしょうか． **お答え：** 「任意」定数.

質問 11： 曲面の場合も変数を 2 つに増やせば同様に曲率関数のようなものが定まるのでしょうか． **お答え：** それを 4Q でやる.

質問 12： 平面曲線の基本定理のように，何か指標（たとえば曲率など）がある種の変換（例えば合同変換や等長変換）によって不変なことを示すと何がうれしいのですか？（それによって幾何学の対象を分類できるなどですか？） **お答え：** 例：半径 $r(\neq 1)$ の円 C_1 の曲率は $1/r$，半径 1 の円 C_0 の曲率は 1．したがって C_0 を回転と平行移動で C_1 に写すことはできない．

質問 13： 平面曲線の基本定理において，曲率関数 $\kappa(s)$ となるものが $\mathbb{R}^2$ の回転と平行移動に移り合うものを除き唯一であるというので，どうして唯一であると言えるのかが分からないので教えて欲しいです． **お答え：** 映写資料 18 ページ（第 4 回に示す）.

質問 14： 曲率関数は折り返すと符号が反転するとのことだったが，定数の曲率関数をもつ曲線などを折り返すとどうなるのか，円を折り返しても円のままになるのでは？ **お答え：** $\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$ を折り返して曲率を定義から計算してみよう．

質問 15： $r(\cos s,\sin s)$ の曲率が $\frac{1}{r}$ に対し，$r(\cos s,-\sin s)$ の曲率は $-\frac{1}{r}$ になると思います．$\mathbb{R}^2$ でない回転であれば不変とは限らないということですか？ **お答え：** $\mathbb{R}^2\subset\mathbb{R}^3$ として $\mathbb{R}^3$ の回転を考えるという意味？ そのとおり．

質問 16： $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\in \mathrm{O}(2)\setminus\mathrm{SO}(2)$ による $\mathbb{R}^2$ への作用について x 軸正と $\frac{\theta}{2}$ 方向のなす直線に対しての反転であることの説明について（山田注：言葉遣いが変？），何故固有値が現れるのか（行列の固有値の平面における意味）が分かりませんでした．
お答え： 1-固有ベクトルは線型変換の不動点.

質問 17： 2 次の O(2) と SO(2) において，SO(2) は $\mathrm{O}(2)\setminus\mathrm{SO}(2)$ と比べて向きを保つ（向きを反転しない）変換行列を元として含むという幾何学的な意味があったと思いますが，3 次の O(3) と SO(3) においても 2 次の場合とにている SO(3) の幾何学的意味がありますか？ もっと一般的に $\mathrm{O}(n)$ と $\mathrm{SO}(n)$ でも似ていることが言えますか？ **お答え：** 映写資料 B，9 ページ．一般の n については「直交行列の標準形」で調べてみよう．

質問 18： 講義資料 B の 12/12 ページにおいて，向きを保つ合同変換 $\Leftrightarrow A\in\mathrm{SO}(n)$ とあるが，$n=2$ で考えた場合，SO(2) は原点周りの回転からなる群であるので向きを保たないと思った． **お答え：** このページで「向きを保つ」という語の定義をしている．

質問 19： 授業の中で曲率関数がでてきましたが，どのような考えでこの形になったのでしょうか． **お答え：** 第 1 回では「天下り」.

質問 20： 曲率関数がどの経緯でこの形になったのかと，曲率関数からなぜ命題の形で導出できるのかがまだ全然わかっていません．どのようにしてこうなるのでしょうか． **お答え：** ご質問の意味が理解できません．何が「導出できる」のでしょうか？

質問 21： 今回の講義では主に $\mathbb{R}^2$ での平面曲線を考えましたが，これは $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^5$,...（山田注：なぜか $\mathbb{R}^3$ がない）という集合で考えたとき，この概念が何か他分野への応用ができるのでしょうか．実用例があれば教えて頂きたいです．（他分野とはたとえば物理学や科学などです）． **お答え：** 系の状態がいくつかの変数で定まるという状況は理学・工学・経済学問わずあらゆる分野で現れます．状態が時間変化すれば自動的に高次元空間の曲線が現れますね．

質問 22： 曲率に関して直線や円の例から曲率が大きいと曲線の曲がり具合が大きいことが分かりました．また，離心率は小さいと曲線の曲がり具合が大きくなる性質があるので（山田注：本当ですか？）数学的に，曲線と離心率は何か関係のあるものなのでしょうか． **お答え：** ご質問の意味が分かりません．山田が知っている「離心率」（テキスト 10 ページ）とあなたの「離心率」は違う？

質問 23： n 次正方行列 A, B が $AB=I$ をみたすならば $BA=I$ となる，ということの証明はクラメルの公式を使えばよいとおっしゃっていたと思いますが，クラメルの公式を用いて実際どのような証明の流れになるのか疑問に思いました．クラメルの公式は方程式の解を求める公式...？ **お答え：** 解の公式の系である逆行列の公式 $A^{-1}=\frac{\widetilde{A}}{|A|}$ のことです（$\widetilde{A}$ は A の余因子行列）.

質問 24： 提出問題で「具体的に」求めよという文がありますが，どのような回答が正しいのでしょうか．たとえば講義のスライドで使われた s_0 の文字を定数として用い，回答したのですが， $\tan^{-1}s_0=\alpha$ という式を用いた方が見やすい式になったのではないか，と書いてから気づきました． **お答え：** 正しい式で「回答者が具体的と思っている」ならばよいような気がします．

質問 25： 平面曲線の基本定理の条件として C^∞-級の仮定がなぜ必要なのでしょうか． **お答え：** κ が C^r-級なら γ は C^{r+2}-級.

質問 26： 講義で $\theta(s)$, $\gamma(s)$ を θ, γ と表記していましたが，テストなどでもそのように表記して良いのでしょうか.

お答え： 独立変数を省略する，ということでしょうか．誤解がおきない文脈ならよいのではないでしょうか．

質問 27： 半径 1 の円の曲率は 1（反時計回り）ですが，（略）の区間や s_0 の値によっては $\kappa(u)=1$ から $\gamma(s)=(\cos s,\sin s)$ だけでなく，$\gamma(s)=(\operatorname{sech}u,\tanh u)$，$\gamma(s)=(\frac{1-s^2}{1+s^2},\frac{2s}{1+s^2})$ を求めることができるのでしょうか． **お答え：** 弧長でないのでだめ.

質問 28： 講義内で曲率関数が $\kappa=1$ となる，弧長によりパラメータづけられた平面曲線を $s_0=0$ として $\gamma(s)=(\sin s,-\cos s-1)$（山田注：訂正欄を参照）と求め，中心 $(0,-1)$，半径 1 の円である，と求めていましたが，任意の実数を s_0 の値に設定しても半径 1 の円を求められるということですか？ **お答え：** やってみたらすぐわかるがなんでやらないのか？

質問 29： 特異点を 1 つでももつ関数は曲率がないということでしょうか． **お答え：** 「特異点をもつ関数」とは？

質問 30： (1.1) は頑張って見つけるしかないのですか？それともなにか論理的に導く方法があるのですか？

お答え： 頑張って見つけることと論理的に導くことは相反しないと思いますが．今回少し説明します．

質問 31： 曲線が自己交叉してしまうと何かよくないことが起きる気がするのですが，実際はどうですか？また，授業では飛ばされましたが，スライドにのっているカスプという図形はなめらかでない曲面（原文ママ：曲線）の例として載せたものですか？

お答え： そんなに悪いものではありません（としか答えようがない？）．後半はそう．サイクロイドと同様なので説明しなかった．

質問 32： 補題 1.3 で $\tilde{\gamma}(t)=A\gamma(t)+\boldsymbol{a}$ とおくのがわかりません． **お答え：** そうですか．スライド B，16 ページで説明した．

2 パラメータ変換と弧長

2.1 パラメータ変換

パラメータ表示された曲線 $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ と $\tilde{\gamma}\colon \widetilde{I} \to \mathbb{R}^n$ に対して，$\tilde{\gamma}$ **が** γ **からパラメータ変換で得られる**とは，C^∞-級全単射 $\varphi\colon \widetilde{I} \to I$ が存在して，$\widetilde{I}$ 上 $\dot{\varphi} > 0$，かつ $\tilde{\gamma}(u) = \gamma\bigl(\varphi(u)\bigr)$ を満たすことである．

例 2.1.
- $I = (-\pi, \pi)$，$\widetilde{I} = \mathbb{R}$ として，$\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$，$\tilde{\gamma}\colon \widetilde{I} \to \mathbb{R}^2$ を
$$\gamma(s) := (\cos s, \sin s), \qquad \tilde{\gamma}(t) := \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$$
で定めると γ は $\tilde{\gamma}$ からパラメータ変換で得られる．実際，$\varphi(s) := \tan\frac{s}{2}$ おけばよい．
- $\mathbb{R}$ 上で，
$$\gamma(s) := (s, 0), \qquad \tilde{\gamma}(t) := (\sinh t, 0), \qquad \hat{\gamma}(u) := (u^3, 0)$$
とおくと，γ は $\tilde{\gamma}$ からパラメータ変換で得られるが $\hat{\gamma}$ からは得られない．実際 $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\sinh t)$，$\hat{\gamma}(u) = \gamma(u^3)$ とかける．$\varphi(t) := \sinh t$ はは $\varphi'(t) > 0$ となる C^∞-級関数で $\mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ に写す．一方，$\psi(u) := u^3$ は $\mathbb{R}$ から自身への全単射を与える C^∞- 級関数だが，$\dot{\psi}(0) = 0$ である．

補題 2.2. (1)「パラメータ変換で得られる曲線である」という関係は同値関係である．
(2) パラメータ付けられた曲線 γ からパラメータ変換で得られる曲線 $\tilde{\gamma}$ の像は γ の像と一致する．
(3) 正則にパラメータづけられた曲線 γ からパラメータ変換で得られる曲線 $\tilde{\gamma}$ はまた正則である．

証明. 最初の 2 つは演習問題．(3) を示す：$\tilde{\gamma}(u) = \gamma(\varphi(u))$ とかけているとする．このとき，合成関数の微分公式から[*1]
$$\frac{d}{du}\tilde{\gamma}(u) = \frac{d\varphi}{du}(u) \cdot \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=\varphi(u)} \gamma(u)$$
なので $\dot{\varphi} > 0$ から $d\tilde{\gamma}/du \neq 0$ と $d\gamma/dt \neq 0$ は同値． □

定理 2.3. 曲率はパラメータのとり方によらない．

証明. 正則にパラメータ表示された曲線 $\gamma(t)$ と，それからパラメータ変換 $t = \varphi(u)$ で得られる曲線 $\tilde{\gamma}(u)$ を考えると
$$\frac{d\tilde{\gamma}}{du} = \frac{d\varphi}{du}\frac{d\gamma}{dt}, \qquad \frac{d^2\tilde{\gamma}}{du^2} = \frac{d^2\varphi}{du^2}\frac{d\gamma}{dt} + \left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2 \frac{d^2\gamma}{dt^2}.$$
したがって $\dot{\varphi} > 0$ に注意すれば
$$\left|\frac{d\tilde{\gamma}}{du}\right| = \frac{d\varphi}{du}\left|\frac{d\gamma}{dt}\right|, \qquad \det\left(\frac{d\tilde{\gamma}}{du}, \frac{d^2\tilde{\gamma}}{du^2}\right) = \left(\frac{d\varphi}{du}\right)^3 \det\left(\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d^2\gamma}{dt^2}\right)$$
なので結論が得られる． □

例 2.4. 関数 $f(x)$ のグラフは $x \mapsto \bigl(x, f(x)\bigr)$ とパラメータ表示される．この曲率は $f''(x)/\sqrt{1+(f'(x))^2}^3$．とくに $x = 0$ でグラフが x 軸に接するならその点での曲率は $f''(0)$ である．

2020 年 10 月 8 日 (2020 年 10 月 15 日訂正)

[*1] この式を省略して $\frac{d\tilde{\gamma}}{du} = \frac{dt}{du}\frac{d\gamma}{dt}$ $(t = \varphi(u))$ などと書く．

2.2 曲線の弧長と弧長パラメータ

定義 2.5. パラメータ付けられた曲線 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ の**弧長**[*2] $\mathcal{L}(\gamma)$ を次で定める：

$$\mathcal{L}(\gamma) := \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\,dt.$$

置換積分の公式から次が得られる：

命題 2.6. 曲線の弧長はパラメータのとり方によらない．

事実 2.7. 写像 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ と区間 $[a,b]$ の分割 $\varDelta : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ に対して

$$\mathcal{L}_\varDelta := \sum_{j=1}^{n} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|$$

と定める．このとき γ が C^1-級ならば $\mathcal{L}(\gamma) = \sup_{\varDelta\colon [a,b] \text{ の分割}} \mathcal{L}_\varDelta$.

注意 2.8. 事実 2.7 はグラフ $y = f(x)$ の場合には「平均値の定理」から得られる．正則曲線であれば，各点の近傍でグラフ表示できるので，グラフ表示での弧長の和をとればよい．

命題 2.9. 弧長によりパラメータ付けれた曲線 $\gamma(s)$ からパラメータ変換 $s = \varphi(u)$ で得られる曲線 $\tilde{\gamma}(u)$ のパラメータ u が弧長パラメータならば，$u = s + b$（b は定数）．

証明. 速さが一致することと $\dot{\varphi}(u) > 0$ から $ds/du = \dot{\varphi} = 1$．したがって $s = u - b$. □

定理 2.10. 正則にパラメータ付けられた曲線は，パラメータ変換により弧長パラメータで表示できる．

証明. 曲線 $\gamma(t)$ の定義域内の点 t_0 に対して

$$s := \int_{t_0}^{t} |\dot{\gamma}(u)|\,du \qquad \text{で定まる関数 } t \mapsto s \text{ は単調増加で，} ds/dt \neq 0.$$

この逆関数を $t = \varphi(s)$ とおき，$\tilde{\gamma}(s) := \gamma\bigl(\varphi(s)\bigr)$ とおくとこれが求めるものである． □

問題

2-1 長軸の長さが $2a$，短軸の長さが $2b$（$a, b > 0$）である楕円 $\gamma_{a,b}(t) = (a\cos t, b\sin t)$ $(-\pi \leqq t \leqq \pi)$ の弧長を $\mathcal{L}(a,b)$ とする．とくに $a + b = 1$ のとき，$\mathcal{L}(a, 1-a)$ が最小値をとるのはどんなときか．（ヒント：$\mathcal{L}(a, 1-a)$ の a に関する 2 階微分を考えるとよいかもしれない）．

2-2 パラメータ表示（正則とは限らない）された曲線 $\gamma(t)$ の点 $t = t_0$（$\gamma(t_0)$）での性質

$$\dot{\gamma}(t_0) = \mathbf{0}, \qquad \det\bigl(\ddot{\gamma}(t_0), \dddot{\gamma}(t_0)\bigr) \neq 0 \qquad \left(\dot{} = \frac{d}{dt}\right)$$

はパラメータのとり方によらないことを示しなさい．

[*2] 弧長：arclength