幾何学概論第一 (MTH.B211)

おしらせ・コメント

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2010/10/15

お知らせ

- 29 名の方から課題の提出がありました．評点およびマーク済みの答案は t2schola におきます．
- 提出用紙は 2 ページからなりますが，2 つのファイルではなく 1 つのファイルとしてください．採点に際して，全ての答案を一つの pdf にマージしていますが，2 ファイルの答案があると前処理に手間がかかります．
- PDF のペーパーサイズは A4 にしてください．お一人だけ $872\text{mm} \times 1237\text{mm}$ という謎のサイズの方がいらっしゃいました．ほぼ A0 に近い大きさです．これを他の pdf と一緒にマージしてタブレット上でコメントをつけようとすると文字が異様に細くなってしまいます．前回もお願いしましたが，A4 サイズにしてください．

コメント

- 10 月 1 日の講義でコメントし，8 日の講義資料のご意見の項のコメントでも言及した誤字「講議」が，再び答案に現れました．この場を借りて罵倒させていただきます．

- 提出物で「題意」という語を使った方が 2 名いらっしゃいました．山田は題意という語の意味を知りません．広辞苑第 6 版では「題の意味するところ」とありますが，数学の文脈での意味は少し違いそうです．貧弱な経験の中で「題意より . . . が成り立つ」と「よって題意が満たされた」という 2 通りの使い方を見たことがあります．文脈で前者は「仮定」後者は「結論」と判断できますが，それなら仮定・結論といえば良いと思います．
  なぜ曖昧な「題意」という語を使うのか，教えてください．
  どうしてもこの語を使いたい人は「こういう経緯で，こういう意味で用いる」と明示的に宣言してください．

授業の感想など

- 課題では 1 つの解答しか出せないが，授業ではどちらの解説も行ってくれるのでありがたいです．
  山田のコメント： 実はこれが授業の本題かも
- できればもう少し講義の本題に入るのを早めていただきたいです．
  山田のコメント： 最初から本題のつもりですが．
- 懸垂線が糸を垂らしたときにできる曲線でる（原文ママ：である？）ことは知っていたが，アーチ橋のカーブに懸垂線が出てくることは知らなかった．
  山田のコメント： 結構知られていることだと思っていました．
- 弧長によりパラメータ付られた曲線の条件 $|\dot{\gamma}| = 1$ から $\dot{\gamma}(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ とおいて積分する発想は思いつかなかった．
  山田のコメント： ですよね．で，θ の不定性が気にならなかった？

質問と回答

Q

第一回で「弧長によりパラメータ付けられているとは $|\gamma'(s)| = 1$ が恒等的に成り立つこと」とありますが，正則にパラメータ付けられた曲線はパラメータ変換により弧長パラメータで表示できるという定理の証明で $|\tilde{\gamma}'(s)| = 1$ ということを確かめていないことに疑問を感じました．

$$s = \int_{t_0}^{t} |\dot{\gamma}(u)|\,du \qquad t = t(s) \qquad \tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$$

A

「. . . とおけばよい．」「. . . とすれば結論が得られる．」は数学の文脈では「. . . とすると，容易に結論が示せる」ということ．容易に示せるはずなので，自分で確かめること．

（というと「テストでこのフレーズを使っていいの」という阿呆な質問がくることがありますが「容易に示せる」というのが重要．採点者が容易かどうかを判断します）．

質問と回答

Q
曲率という概念が生まれた動機が知りたいです．（授業受けてもなお「何のための量？」となっています）．

A
動機は推測にしかならないので分からない．何のため？は授業で 2 つくらい説明したが，それは理解した上でしっくりこないのでしょうか？それとも説明した内容が入っていない？今回もう一つの説明をします．

$\theta' = \kappa$

A
「方向の変化率」「平面曲線の基本定理（曲線を過不足なく決める量）」は講義で説明しました．

質問と回答

Q
弧長パラメータをパラメータとする曲線は，弧長にパラメータづけされている，ということは分かったのですが，逆はどうなのでしょうか？(弧長によりパラメータづけられている曲線のパラメータは弧長パラメータとは限らない気がします）.

A
言葉の使い方が不適切かもしれませんが，この講義では「$\gamma(s)$ の s が弧長パラメータである」ということと「$\gamma(s)$ が弧長 s によりパラメータづけられている」は同義で，どちらも $\boxed{|\gamma'(s)| = 1}$ の意味で使います.

質問と回答

Q

正則曲線から弧長によってパラメータ付けられる曲線を得た場合，この曲線は一意に定まりますか？($\psi := \int_{t_0}^{t} |\gamma'| \, dt$ の t_0 のとり方で区間が横に定数分ずれる以外）.

パラメータ

$\gamma(s)$ $\tilde{\gamma}(t)$

弧長

A

はい．$\boxed{\text{命題 2.9}}$ からわかる．

注：定数の差だけの自由度．

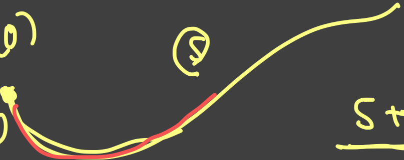
$\gamma(1)$

$t=1$ $s = t + \mathrm{const}$

$\gamma(0)$

$t=0$

s



$s+10 = t$: 弧長

質問と回答

Q

$\frac{ds}{dt}$

パラメータ変換の任意性のくだりにおいて $\frac{ds}{ds} < 0$ を議論しないのはなぜですか.

A

この講義の文脈では曲線は「向きがついているもの」と考える.
実際，反時計回りの円（曲率正）と時計回りの円（曲率負）は違う曲線とみなしたい.

質問と回答

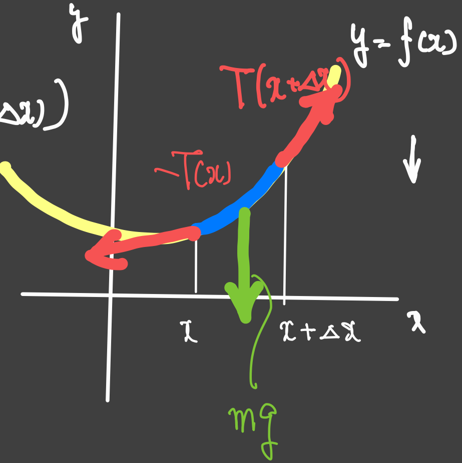
Q
電線のたるみがカテナリであることの具体的な導き方が分かりませんでした.

A
力学などの教科書にあると思う. 曲線の小さな部分にはたらく重力と, 両端にはたらく張力が釣り合っている, という式から微分方程式を立てる.

注：5 分程度の時間があれば説明してみる.

懸垂線

$$\begin{cases} T(x+\Delta x) = \varphi(x+\Delta x)\,(1,\ f'(x+\Delta x)) \\ -T(x) = \varphi(x)\,(1,\ f'(x)) \end{cases}$$



⊕ x成分はつりあっている

$$\varphi(x) = \mathrm{const} = k$$

$$mg = \rho \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+f'(x)^2}\, dx$$

$$= \rho g \sqrt{1+f'(x+\theta\Delta x)^2}\,\Delta x \quad (0<\theta<1) \quad \rho: \text{線密度}$$

つりあいの式 $\quad k\left(f'(x+\Delta x) - f'(x)\right) = \rho g \sqrt{1+f'(x+\theta\Delta x)^2}\,\Delta x$

$/\Delta x,\ \Delta x \to 0 \qquad k f'' = \rho g \sqrt{1+f'^2}$

講義

この後，短い休憩をとり，２つの「講義」を行います．

質問などをチャットで行なう場合は，全員宛てにしてください

2 パラメータ変換と弧長（補足）

3 曲率円・回転数