幾何学概論第一 (MTH.B211)

2: パラメータ変換と弧長（補足）

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2010/10/15

曲線の弧長（復習）

定義

パラメータ付けられた曲線 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ の弧長を次で定める：

$$\mathcal{L}(\gamma) := \int_a^b |\dot\gamma(t)|\,dt.$$

命題

曲線の弧長はパラメータのとり方によらない.

置換積分

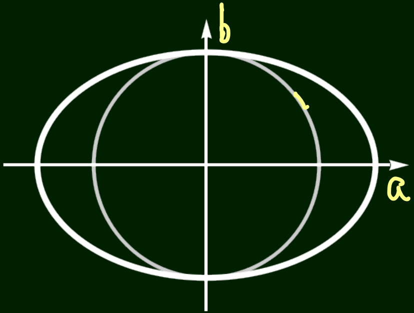
・（Chain rule
置換積分）

問題 2-1

問題

長軸の長さが $2a$, 短軸の長さが $2b$（$a \geq b > 0$）である楕円 $\gamma_{a,b}(t) = (a\cos t, b\sin t)$ $(-\pi \leq t \leq \pi)$ の弧長を $\mathcal{L}(a,b)$ とする. とくに $a+b=1$ のとき, $\mathcal{L}(a, 1-a)$ が最小値をとるのはどんなときか.

$a, b > 0$



問題 2-1

問題

長軸の長さが $2a$，短軸の長さが $2b$（$a > b > 0$）である楕円 $\gamma_{a,b}(t) = (a\cos t, b\sin t)$ $(-\pi \leq t \leq \pi)$ の弧長を $\mathcal{L}(a,b)$ とする．とくに $a+b=1$ のとき，$\mathcal{L}(a, 1-a)$ が最小値をとるのはどんなときか．

$\dot{\gamma} = (-a\sin t, b\cos t)$

$$\mathcal{L}(a,b) = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{a^2 \underbrace{\sin^2 t}_{1-\cos^2 t} + b^2\cos^2 t}\,dt$$

$$= 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\,dt \qquad \varepsilon := \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \quad \text{(離心率)}$$

$(t \mapsto \frac{\pi}{2} - t)$

eccentricity

$$= 4aE(\varepsilon)$$

$$E(k) := \int_0^{\pi/2}\boxed{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}\,dt \quad \text{(第 2 種完全楕円積分)}$$

原始関数：初等関数でない

問題 2-1

$$\mathcal{L}(a, 1-a) = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 + (1-2a)\sin^2 t}\, dt$$

$$\frac{d}{da}\mathcal{L}(a, 1-a) = 4\int_0^{\pi/2} \frac{a - \sin^2 t}{\sqrt{a^2 + (1-2a)\sin^2 t}}\, dt$$

$$\frac{d^2}{da^2}\mathcal{L}(a, 1-a) = 4\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 t\, \sin^2 t}{\sqrt{a^2 + (1-2a)\sin^2 t}^3}\, dt > 0$$

$$\frac{d}{da}\int_p^q F(a,t)\, dt = \int_p^q \frac{\partial}{\partial a} F(a,t)\, dt$$

問題 2-1

$$\mathcal{L}(a, 1-a) = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 + (1-2a)\sin^2 t}\, dt$$

$$\frac{d}{da}\mathcal{L}(a, 1-a) = 4\int_0^{\pi/2} \frac{a - \sin^2 t}{\sqrt{a^2 + (1-2a)\sin^2 t}}\, dt$$

$$\frac{d^2}{da^2}\mathcal{L}(a, 1-a) = 4\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 t\, \sin^2 t}{\sqrt{a^2 + (1-2a)\sin^2 t}^3}\, dt > 0$$

a	0		$\frac{1}{2}$		1
$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{L}(a, 1-a)$		$+$	$+$	$+$	
$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(a, 1-a)$	-4	$\nearrow$	0	$\nearrow$	4
$\mathcal{L}(a, 1-a)$	4	$\searrow$	π	$\nearrow$	4

$a = \frac{1}{2}$, すなわち半径 $\frac{1}{2}$ の円のとき最小.

問題 2-1 (積分)

$\int \sqrt{2次式}$: 初等関数.

Q

問 2-1 は $\frac{d}{da}\mathcal{L}(a, 1-a)$ の値を具体的に求めることはできるのでしょうか.

$\sqrt{3次式}$

$\sqrt{4次式}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

A

$a = 0, 1$ 以外の場合は被積分関数の原始関数が初等関数でない（楕円積分）ので，“求めることはできない” とも言えます.

$\boxed{x = \sin t}$

$\frac{1}{2}$

$$F(k) := \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} \qquad \text{(第 1 種完全楕円積分)}$$

$$E(k) := \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}\, dt \qquad \text{(第 2 種完全楕円積分)}$$

$$\Pi(a; k) := \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{(1 - a\sin^2 t)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} \qquad \text{(第 3 種完全楕円積分)}$$

(cf. 森口他：「数学公式 I」岩波全書)

問題 2-2

問題

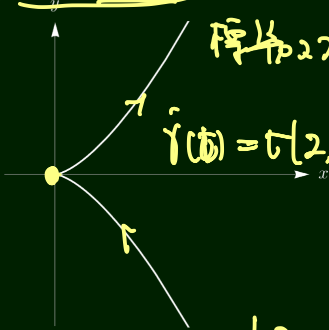
パラメータ表示（正則とは限らない）された曲線 $\gamma(t)$ の点 $t=t_0$（$\gamma(t_0)$）での性質

$$\dot\gamma(t_0)=\mathbf{0},\qquad \det\bigl(\ddot\gamma(t_0),\dddot\gamma(t_0)\bigr)\neq 0\qquad \left(\dot{} = \frac{d}{dt}\right)$$

はパラメータのとり方によらないことを示しなさい.

問題 2-2

$\gamma(t) = (t^2, t^3)$; $t_0 = 0$:

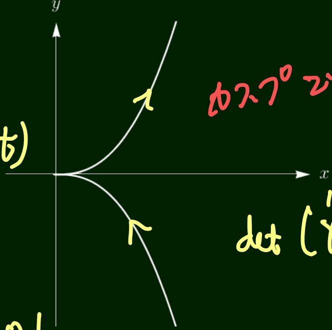


特異点？

$\dot{\gamma}(t) = t(2, 3t)$

$\det(\ddot{\gamma}\ \dddot{\gamma})(0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 6t & 6 \end{vmatrix}_{t=0} = 12 \neq 0$

$\gamma(t) = (t^2, t^5)$; $t_0 = 0$:



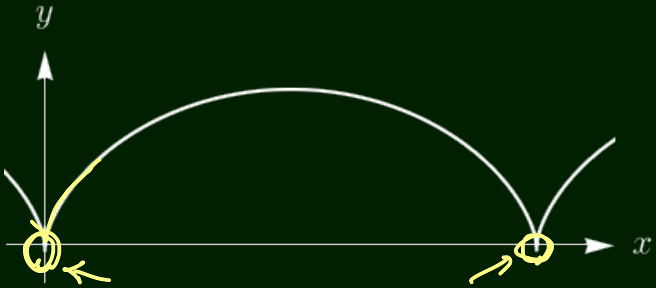
カスプです

$\det(\ddot{\gamma}\ \dddot{\gamma})(0) = 0$

パラメータ変換でうつりあわない

問題 2-2

$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)\ ;\ t_0 = 0.$$



$\dot{\gamma} = 0$ $\qquad$ $|\dot{\gamma}\ \ddot{\gamma}| \neq 0$

問題 2-2

$\mathbb{R}^2$ の領域 D_1 から $\mathbb{R}^2$ の領域 D_2 への C^∞-級全単射

$$\varphi\colon D_1 \ni (x,y) \longmapsto \bigl(u(x,y), v(x,y)\bigr) \in D_2$$

が微分同相写像であるとは

$$\boxed{\det\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \neq 0}$$

が D_1 の各点で成り立つこと.

$\mathbb{R}^2$ の座標変換

事実 (カスプの判定条件)

曲線 $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ が $t_0 \in I$ を含む区間のパラメータ変換と $\gamma(t_0)$ を含む領域の微分同相写像によって (t^2, t^3)（標準カスプ）という形にできるための必要十分条件は

$$\boxed{\dot\gamma(t_0) = 0, \quad \det\bigl(\ddot\gamma(t_0), \dddot\gamma(t_0)\bigr) \neq 0}$$

が成り立つことである.

0

カスプ

問題 2-2

問題

曲線 $\gamma(t)$ の次の性質はパラメータのとり方によらない：

$$\dot\gamma(t_0) = \mathbf{0}, \qquad \det\bigl(\ddot\gamma(t_0), \dddot\gamma(t_0)\bigr) \neq 0 \qquad \left(\cdot = \frac{d}{dt}\right)$$

命題

問題の状況でパラメータ変換 $t = \varphi(u)$ $(t_0 = \varphi(u_0))$ により, $\tilde\gamma(u) := \gamma\bigl(\varphi(u)\bigr)$ とおくと

$$\frac{d\tilde\gamma}{du}(u_0) \cancel{\neq} \mathbf{0}, \quad \det\left(\frac{d^2\tilde\gamma}{du^2}(u_0), \frac{d^3\tilde\gamma}{du^3}(u_0)\right) \neq 0$$

$$= \qquad \Leftrightarrow \quad \frac{d\gamma}{dt}(t_0) = \mathbf{0}, \qquad \det\left(\frac{d^2\gamma}{dt^2}(t_0), \frac{d^3\gamma(t_0)}{dt^3}\right) \neq 0$$

問題 2-2

命題

$\tilde{\gamma}(u) = \gamma\bigl(\varphi(u)\bigr)$, $t_0 = \varphi(u_0)$ の~~の~~とき

t

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{du}(u_0) \cancel{\neq} \mathbf{0}, \quad \det\left(\frac{d^2\tilde{\gamma}}{du^2}(u_0), \frac{d^3\tilde{\gamma}}{du^3}(u_0)\right)$$

$=$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d\gamma}{dt}(t_0) = \mathbf{0}, \qquad \det\left(\frac{d^2\gamma}{dt^2}(t_0), \frac{d^3\gamma(t_0)}{dt^3}\right) \neq 0$$

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{du}(u_0) = \underline{\frac{d\varphi}{du}(u_0)}\,\underline{\frac{d\gamma}{dt}(t_0)}, \qquad \frac{d\varphi}{du} > 0$$

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{du}(u_0) = 0 \iff \frac{d\gamma}{dt}(t_0) = 0$$

問題 2-2

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{du}(u_0) = \frac{d\varphi}{du}(u_0)\frac{d\gamma}{dt}(t_0),$$

$$\frac{d^2\tilde{\gamma}}{du^2}(u_0) = \frac{d^2\varphi}{du^2}\cancel{(u_0)\frac{d\gamma}{dt}}(t_0) + \left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2\frac{d^2\gamma}{dt^2}(t_0),$$

$$\frac{d^3\tilde{\gamma}}{du^3}(u_0) = \frac{d^3\varphi}{du^3}\cancel{(u_0)\frac{d\gamma}{dt}}(t_0) + \boxed{3\frac{d^2\varphi}{du^2}(u_0)\frac{d\varphi}{du}(u_0)\frac{d^2\gamma}{dt^2}(u_0)}$$

$$+\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^3\frac{d^3\gamma}{dt^3}(t_0),$$

$$\frac{d}{du} = \frac{d\varphi}{du}\frac{d}{dt}$$

det とると考える

$\dfrac{d\gamma}{dt}(t_0) = \mathbf{0}$　ならば

$$\det\left(\frac{d^2\tilde{\gamma}}{du^2}(u_0), \frac{d^3\tilde{\gamma}}{du^3}(u_0)\right) = \left(\frac{d\varphi}{du}(u_0)\right)^5 \det\left(\frac{d^2\gamma}{dt^2}(t_0), \frac{d^3\gamma(t_0)}{dt^3}\right).$$

問題 2-2

Q

問題 2-2 でなぜ 3 回微分まで議論するのでしょうか.

A

- しちゃだめですか？
- これが「カスプ」の判定条件.

問題 2-2

Q

正則である曲線について今は議論していますが，正則でない曲線の研究はあまりすすめられていないのですか？

A

いいえ.
たとえば梅原・佐治・山田「特異点をもつ曲線と曲面の微分幾何学」（丸善出版，2017）.