

幾何学概論第一 (MTH.B211)

2: パラメータ変換と弧長 (補足)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2010/10/15(2020/10/22 訂正)

定義

パラメータ付けられた曲線 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ の弧長を次で定める:

$$\mathcal{L}(\gamma) := \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

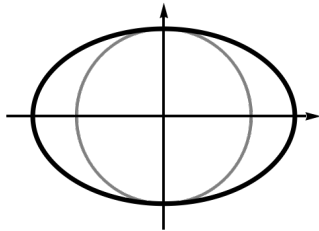
命題

曲線の弧長はパラメータのとり方によらない.

問題 2-1

問題

長軸の長さが $2a$, 短軸の長さが $2b$ ($a \geq b > 0$) である楕円 $\gamma_{a,b}(t) = (a \cos t, b \sin t)$ ($-\pi \leq t \leq \pi$) の弧長を $\mathcal{L}(a, b)$ とする. とくに $a + b = 1$ のとき, $\mathcal{L}(a, 1 - a)$ が最小値をとるのはどんなときか.



問題 2-1

問題

長軸の長さが $2a$, 短軸の長さが $2b$ ($a > b > 0$) である楕円 $\gamma_{a,b}(t) = (a \cos t, b \sin t)$ ($-\pi \leq t \leq \pi$) の弧長を $\mathcal{L}(a, b)$ とする. とくに $a + b = 1$ のとき, $\mathcal{L}(a, 1 - a)$ が最小値をとるのはどんなときか.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(a, b) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\ &= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt \quad \varepsilon := \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (\text{離心率}) \\ &= 4aE(\varepsilon) \\ E(k) &:= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt \quad (\text{第 2 種完全楕円積分}) \end{aligned}$$

問題 2-1

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(a, 1 - a) &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 + (1 - 2a) \sin^2 t} dt \\ \frac{d}{da} \mathcal{L}(a, 1 - a) &= 4 \int_0^{\pi/2} \frac{a - \sin^2 t}{\sqrt{a^2 + (1 - 2a) \sin^2 t}} dt \\ \frac{d^2}{da^2} \mathcal{L}(a, 1 - a) &= 4 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 t \sin^2 t}{\sqrt{a^2 + (1 - 2a) \sin^2 t}^3} dt > 0 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{da} \int_p^q F(a, t) dt = \int_p^q \frac{\partial}{\partial a} F(a, t) dt$$

問題 2-1

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(a, 1 - a) &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 + (1 - 2a) \sin^2 t} dt \\ \frac{d}{da} \mathcal{L}(a, 1 - a) &= 4 \int_0^{\pi/2} \frac{a - \sin^2 t}{\sqrt{a^2 + (1 - 2a) \sin^2 t}} dt \\ \frac{d^2}{da^2} \mathcal{L}(a, 1 - a) &= 4 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 t \sin^2 t}{\sqrt{a^2 + (1 - 2a) \sin^2 t}^3} dt > 0 \end{aligned}$$

a	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{d^2}{da^2} \mathcal{L}(a, 1 - a)$		+	+
$\frac{d}{da} \mathcal{L}(a, 1 - a)$	-4	\nearrow 0	\searrow 4
$\mathcal{L}(a, 1 - a)$	4	\searrow π	\nearrow 4

$a = \frac{1}{2}$, すなわち半径 $\frac{1}{2}$ の円のとき最小.

問題 2-1 (積分)

Q

問 2-1 は $\frac{d}{da} \mathcal{L}(a, 1 - a)$ の値を具体的に求めることはできるのでしょうか.

A

$a = 0, 1/2, 1$ 以外の場合は被積分関数の原始関数が初等関数でない (楕円積分) ので, "求めることはできない" とも言えます.

$$F(k) := \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} \quad (\text{第 1 種完全楕円積分})$$

$$E(k) := \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt \quad (\text{第 2 種完全楕円積分})$$

$$\Pi(a; k) := \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{(1 - a \sin^2 t) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} \quad (\text{第 3 種完全楕円積分})$$

(cf. 森口他: 「数学公式 I」 岩波全書)

問題 2-2

問題

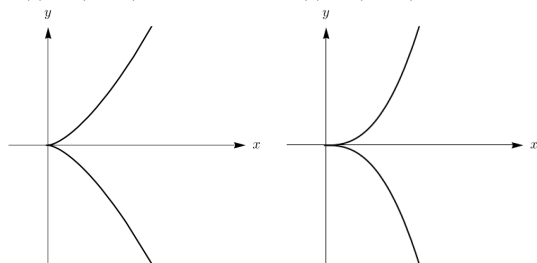
パラメータ表示 (正則とは限らない) された曲線 $\gamma(t)$ の点 $t = t_0$ ($\gamma(t_0)$) での性質

$$\dot{\gamma}(t_0) = \mathbf{0}, \quad \det(\dot{\gamma}(t_0), \ddot{\gamma}(t_0)) \neq 0 \quad \left(\cdot = \frac{d}{dt} \right)$$

はパラメータのとり方によらないことを示しなさい.

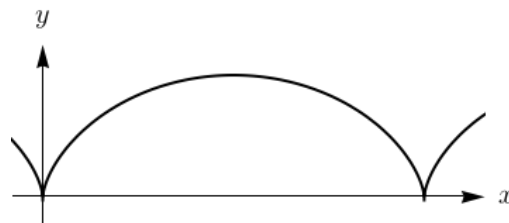
問題 2-2

$$\gamma(t) = (t^2, t^3); t_0 = 0: \quad \gamma(t) = (t^2, t^5); t_0 = 0:$$



問題 2-2

$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t); t_0 = 0.$$



問題 2-2

\mathbb{R}^2 の領域 D_1 から \mathbb{R}^2 の領域 D_2 への C^∞ -級全単射

$$\varphi: D_1 \ni (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y)) \in D_2$$

が微分同相写像であるとは

$$\det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \neq 0$$

が D_1 の各点で成り立つこと .

事実 (カスプの判定条件)

曲線 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ が $t_0 \in I$ を含む区間のパラメータ変換と $\gamma(t_0)$ を含む領域の微分同相写像によって (t^2, t^3) (標準カスプ) という形にできるための必要十分条件は

$$\dot{\gamma}(t_0) = \mathbf{0}, \quad \det(\ddot{\gamma}(t_0), \ddot{\gamma}(t_0)) \neq 0$$

が成り立つことである .

問題 2-2

問題

曲線 $\gamma(t)$ の次の性質はパラメータのとり方によらない:

$$\dot{\gamma}(t_0) = \mathbf{0}, \quad \det(\ddot{\gamma}(t_0), \ddot{\gamma}(t_0)) \neq 0 \quad \left(\cdot = \frac{d}{dt} \right)$$

命題

問題の状況でパラメータ変換 $t = \varphi(u)$ ($t_0 = \varphi(u_0)$) により, $\tilde{\gamma}(u) := \gamma(\varphi(u))$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\gamma}}{du}(u_0) = \mathbf{0}, \quad \det \left(\frac{d^2\tilde{\gamma}}{du^2}(u_0), \frac{d^3\tilde{\gamma}}{du^3}(u_0) \right) \neq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d\gamma}{dt}(t_0) = \mathbf{0}, \quad \det \left(\frac{d^2\gamma}{dt^2}(t_0), \frac{d^3\gamma}{dt^3}(t_0) \right) \neq 0 \end{aligned}$$

が成り立つ .

問題 2-2

命題

$\tilde{\gamma}(u) = \gamma(\varphi(u))$, $t_0 = \varphi(u_0)$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\gamma}}{du}(u_0) = \mathbf{0}, \quad \det \left(\frac{d^2\tilde{\gamma}}{du^2}(u_0), \frac{d^3\tilde{\gamma}}{du^3}(u_0) \right) \neq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d\gamma}{dt}(t_0) = \mathbf{0}, \quad \det \left(\frac{d^2\gamma}{dt^2}(t_0), \frac{d^3\gamma}{dt^3}(t_0) \right) \neq 0 \end{aligned}$$

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{du}(u_0) = \frac{d\varphi}{du}(u_0) \frac{d\gamma}{dt}(t_0), \quad \frac{d\varphi}{du} > 0$$

問題 2-2

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\gamma}}{du}(u_0) &= \frac{d\varphi}{du}(u_0) \frac{d\gamma}{dt}(t_0), \\ \frac{d^2\tilde{\gamma}}{du^2}(u_0) &= \frac{d^2\varphi}{du^2}(u_0) \frac{d\gamma}{dt}(t_0) + \left(\frac{d\varphi}{du} \right)^2 \frac{d^2\gamma}{dt^2}(t_0), \\ \frac{d^3\tilde{\gamma}}{du^3}(u_0) &= \frac{d^3\varphi}{du^3}(u_0) \frac{d\gamma}{dt}(t_0) + 3 \frac{d^2\varphi}{du^2}(u_0) \frac{d\varphi}{du}(u_0) \frac{d^2\gamma}{dt^2}(t_0) \\ &\quad + \left(\frac{d\varphi}{du} \right)^3 \frac{d^3\gamma}{dt^3}(t_0), \end{aligned}$$

$$\frac{d\gamma}{dt}(t_0) = \mathbf{0} \quad \text{ならば}$$

$$\det \left(\frac{d^2\tilde{\gamma}}{du^2}(u_0), \frac{d^3\tilde{\gamma}}{du^3}(u_0) \right) = \left(\frac{d\varphi}{du}(u_0) \right)^5 \det \left(\frac{d^2\gamma}{dt^2}(t_0), \frac{d^3\gamma}{dt^3}(t_0) \right).$$

問題 2-2

Q

問題 2-2 でなぜ 3 回微分まで議論するのでしょうか .

A

- ▶ しちゃだめですか?
- ▶ これが「カスプ」の判定条件 .

問題 2-2

Q

正則である曲線について今は議論していますが, 正則でない曲線の研究はあまりすすめられていないのですか?

A

いいえ .
たとえば梅原・佐治・山田「特異点をもつ曲線と曲面の微分幾何学」(丸善出版, 2017) .

