幾何学概論第一 (MTH.B211)

2: パラメータ変換と弧長（補足）

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2010/10/15(2020/10/22 **訂正**)

曲線の弧長（復習）

定義

パラメータ付けられた曲線 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ の弧長を次で定める：

$$\mathcal{L}(\gamma) := \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\,dt.$$

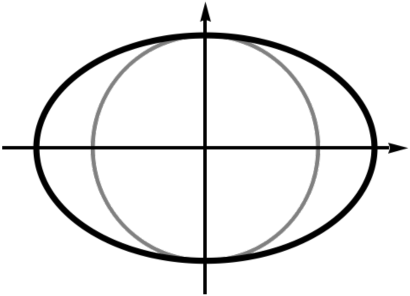
命題

曲線の弧長はパラメータのとり方によらない．

問題 2-1

問題

長軸の長さが $2a$**，短軸の長さが** $2b$ **（**$a \geq b > 0$**）である楕円** $\gamma_{a,b}(t) = (a\cos t, b\sin t)$ $(-\pi \leq t \leq \pi)$ **の弧長を** $\mathcal{L}(a,b)$ **とする．とくに** $a+b=1$ **のとき，**$\mathcal{L}(a,1-a)$ **が最小値をとるのはどんなときか．**



問題 2-1

問題

長軸の長さが $2a$**，短軸の長さが** $2b$**（**$a > b > 0$**）である楕円** $\gamma_{a,b}(t) = (a\cos t, b\sin t)$ **(**$-\pi \leq t \leq \pi$**) の弧長を** $\mathcal{L}(a,b)$ **とする．とくに** $a+b=1$ **のとき，**$\mathcal{L}(a, 1-a)$ **が最小値をとるのはどんなときか．**

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(a,b) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt \\ &= 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\,dt \qquad \varepsilon := \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \quad (\text{離心率}) \\ &= 4aE(\varepsilon)\end{aligned}$$

$$E(k) := \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt \quad (\text{第 2 種完全楕円積分})$$

問題 2-1

$$\mathcal{L}(a,1-a) = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2+(1-2a)\sin^2 t}\,dt$$

$$\frac{d}{da}\mathcal{L}(a,1-a) = 4\int_0^{\pi/2} \frac{a-\sin^2 t}{\sqrt{a^2+(1-2a)\sin^2 t}}\,dt$$

$$\frac{d^2}{da^2}\mathcal{L}(a,1-a) = 4\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 t\,\sin^2 t}{\sqrt{a^2+(1-2a)\sin^2 t}^3}\,dt > 0$$

$$\frac{d}{da}\int_p^q F(a,t)\,dt = \int_p^q \frac{\partial}{\partial a}F(a,t)\,dt$$

問題 2-1

$$\mathcal{L}(a, 1-a) = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 + (1-2a)\sin^2 t}\, dt$$

$$\frac{d}{da}\mathcal{L}(a, 1-a) = 4\int_0^{\pi/2} \frac{a - \sin^2 t}{\sqrt{a^2 + (1-2a)\sin^2 t}}\, dt$$

$$\frac{d^2}{da^2}\mathcal{L}(a, 1-a) = 4\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 t\, \sin^2 t}{\sqrt{a^2 + (1-2a)\sin^2 t}^3}\, dt > 0$$

a	0		$\frac{1}{2}$		1
$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{L}(a, 1-a)$		$+$	$+$	$+$	
$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(a, 1-a)$	-4	$\nearrow$	0	$\nearrow$	4
$\mathcal{L}(a, 1-a)$	4	$\searrow$	π	$\nearrow$	4

$a = \frac{1}{2}$，すなわち半径 $\frac{1}{2}$ の円のとき最小.

問題 2-1 (積分)

Q

問 2-1 は $\frac{d}{da}\mathcal{L}(a, 1-a)$ の値を具体的に求めることはできるのでしょうか．

A

$a = 0$, $1/2$, 1 **以外の場合は被積分関数の原始関数が初等関数でない（楕円積分）ので，“求めることはできない” とも言えます．**

$$F(k) := \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} \qquad \text{(第 1 種完全楕円積分)}$$

$$E(k) := \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt \qquad \text{(第 2 種完全楕円積分)}$$

$$\Pi(a;k) := \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{(1-a\sin^2 t)\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} \qquad \text{(第 3 種完全楕円積分)}$$

(cf. 森口他：「数学公式 I」岩波全書)

問題 2-2

問題

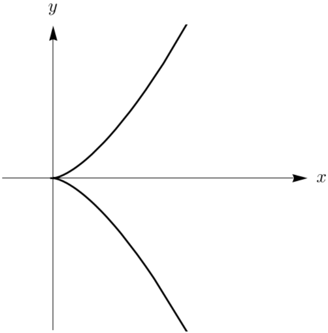
パラメータ表示（正則とは限らない）された曲線 $\gamma(t)$ の点 $t=t_0$（$\gamma(t_0)$）での性質

$$\dot{\gamma}(t_0)=\mathbf{0},\qquad \det\bigl(\ddot{\gamma}(t_0),\dddot{\gamma}(t_0)\bigr)\neq 0 \qquad \left(\cdot=\frac{d}{dt}\right)$$

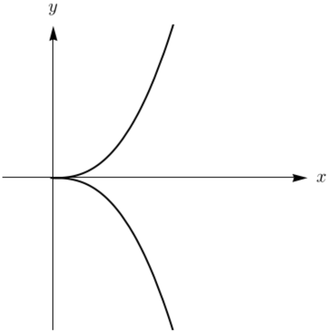
はパラメータのとり方によらないことを示しなさい．

問題 2-2

$\gamma(t) = (t^2, t^3)$; $t_0 = 0$:

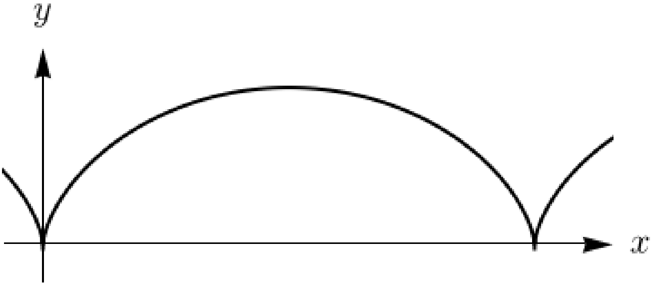


$\gamma(t) = (t^2, t^5)$; $t_0 = 0$:



問題 2-2

$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)\text{；} t_0 = 0\text{．}$$



問題 2-2

$\mathbb{R}^2$ の領域 D_1 から $\mathbb{R}^2$ の領域 D_2 への C^∞-級全単射

$$\varphi\colon D_1 \ni (x,y) \longmapsto \bigl(u(x,y), v(x,y)\bigr) \in D_2$$

が微分同相写像であるとは

$$\det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \neq 0$$

が D_1 の各点で成り立つこと．

事実 (カスプの判定条件)

曲線 $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ が $t_0 \in I$ を含む区間のパラメータ変換と $\gamma(t_0)$ を含む領域の微分同相写像によって (t^2, t^3)（標準カスプ）という形にできるための必要十分条件は

$$\dot{\gamma}(t_0) = \mathbf{0}, \quad \det\bigl(\ddot{\gamma}(t_0), \dddot{\gamma}(t_0)\bigr) \neq 0$$

が成り立つことである．

問題 2-2

問題

曲線 $\gamma(t)$ の次の性質はパラメータのとり方によらない：

$$\dot{\gamma}(t_0) = \mathbf{0}, \qquad \det\bigl(\ddot{\gamma}(t_0), \dddot{\gamma}(t_0)\bigr) \neq 0 \qquad \left(\cdot = \frac{d}{dt}\right)$$

命題

問題の状況でパラメータ変換 $t = \varphi(u)$ $(t_0 = \varphi(u_0))$ により，$\tilde{\gamma}(u) := \gamma\bigl(\varphi(u)\bigr)$ とおくと

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{du}(u_0) = \mathbf{0}, \quad \det\left(\frac{d^2\tilde{\gamma}}{du^2}(u_0), \frac{d^3\tilde{\gamma}}{du^3}(u_0)\right) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d\gamma}{dt}(t_0) = \mathbf{0}, \qquad \det\left(\frac{d^2\gamma}{dt^2}(t_0), \frac{d^3\gamma(t_0)}{dt^3}\right) \neq 0$$

が成り立つ．

問題 2-2

命題

$\tilde{\gamma}(u) = \gamma\bigl(\varphi(u)\bigr)$, $t_0 = \varphi(u_0)$ **のとき**

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{du}(u_0) = \mathbf{0}, \quad \det\left(\frac{d^2\tilde{\gamma}}{du^2}(u_0), \frac{d^3\tilde{\gamma}}{du^3}(u_0)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d\gamma}{dt}(t_0) = \mathbf{0}, \qquad \det\left(\frac{d^2\gamma}{dt^2}(t_0), \frac{d^3\gamma(t_0)}{dt^3}\right) \neq 0$$

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{du}(u_0) = \frac{d\varphi}{du}(u_0)\frac{d\gamma}{dt}(t_0), \qquad \frac{d\varphi}{du} > 0$$

問題 2-2

$$
\begin{aligned}
\frac{d\tilde{\gamma}}{du}(u_0) &= \frac{d\varphi}{du}(u_0)\frac{d\gamma}{dt}(t_0),\\
\frac{d^2\tilde{\gamma}}{du^2}(u_0) &= \frac{d^2\varphi}{du^2}(u_0)\frac{d\gamma}{dt}(t_0) + \left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2 \frac{d^2\gamma}{dt^2}(t_0),\\
\frac{d^3\tilde{\gamma}}{du^3}(u_0) &= \frac{d^3\varphi}{du^3}(u_0)\frac{d\gamma}{dt}(t_0) + 3\frac{d^2\varphi}{du^2}(u_0)\frac{d\varphi}{du}(u_0)\frac{d^2\gamma}{dt^2}(u_0)\\
&\qquad + \left(\frac{d\varphi}{du}\right)^3 \frac{d^3\gamma}{dt^3}(t_0),
\end{aligned}
$$

$\dfrac{d\gamma}{dt}(t_0) = \mathbf{0}$ **ならば**

$$
\det\left(\frac{d^2\tilde{\gamma}}{du^2}(u_0), \frac{d^3\tilde{\gamma}}{du^3}(u_0)\right) = \left(\frac{d\varphi}{du}(u_0)\right)^5 \det\left(\frac{d^2\gamma}{dt^2}(t_0), \frac{d^3\gamma(t_0)}{dt^3}\right).
$$

問題 2-2

Q

問題 2-2 でなぜ 3 回微分まで議論するのでしょうか．

A

- **しちゃだめですか？**
- **これが「カスプ」の判定条件．**

問題 2-2

Q

正則である曲線について今は議論していますが，正則でない曲線の研究はあまりすすめられていないのですか？

A

いいえ．

たとえば梅原・佐治・山田「特異点をもつ曲線と曲面の微分幾何学」（丸善出版，2017）．