

幾何学概論第一 (MTH.B211)

3: 曲率円・回転数

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2010/10/15

目標

定理 (テキスト 17 ページ, 定理 2.4)

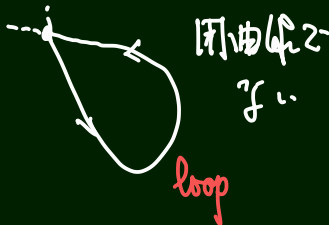
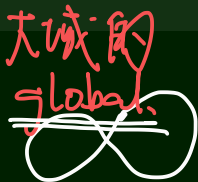
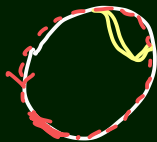
曲線 γ の t_0 における曲率円は, γ と $P := \gamma(t_0)$ において 2 次の接触をする. 逆に $\gamma(t_0)$ において 2 次の接触をする円は曲率円である.

曲率の意味

局所的
local

定理 (テキスト 30 ページ, 命題 3.1)

閉曲線の回転数は整数である. さらに, 閉曲線の「連続変形」で回転数は不変である.



単位法線ベクトル

- ▶ $\gamma(t)$: \mathbb{R}^2 の正則曲線 (= 正則にパラメータ付けられた平面曲線)

$$e(t) := \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} \quad \text{Ⓢ}(t) \quad \text{(進行方向の単位接ベクトル)}$$

$$n(t) := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{Ⓢ}(t) \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad \text{(左向き単位法線ベクトル)}$$



単位法線ベクトル

- ▶ $\gamma(s) = (x(s), y(s))$: 弧長でパラメータ付けられた平面曲線
($\Leftrightarrow |\gamma'(s)| = 1$)

$$e(s) = \underline{(x'(s), y'(s))}, \quad n(s) = \underline{(-y'(s), x'(s))}$$

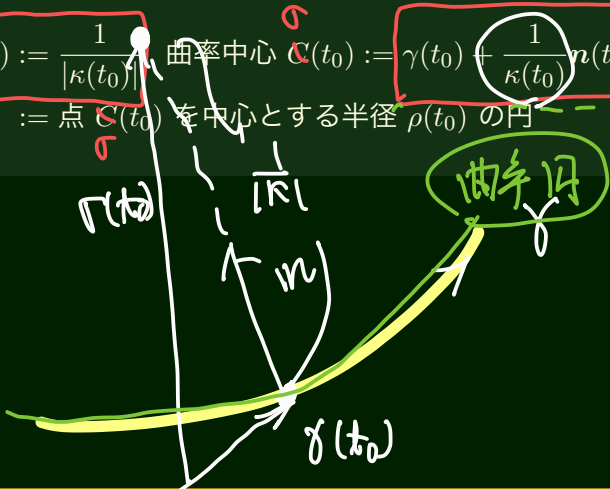
曲率半径・曲率中心

定義

曲線 $\gamma(t)$ の $t = t_0$ における

曲率半径 $\rho(t_0) := \frac{1}{|\kappa(t_0)|}$ 曲率中心 $C(t_0) := \gamma(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}n(t_0)$

曲率円 := 点 $C(t_0)$ を中心とする半径 $\rho(t_0)$ の円



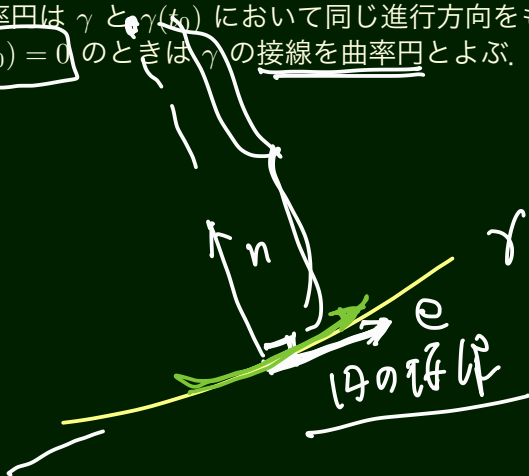
曲率円

Lemma

曲率円は $\gamma(t_0)$ で γ と接線を共有する.

注：曲率円は γ と $\gamma(t_0)$ において同じ進行方向をもつとする.

注： $\kappa(t_0) = 0$ のときは γ の接線を曲率円とよぶ.



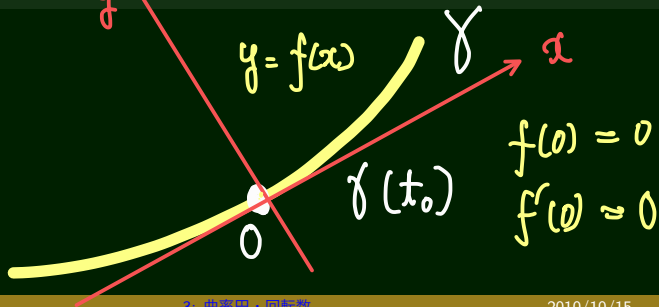
グラフ表示の補題

補題

正則曲線 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t_0 \in I$ に対して \mathbb{R}^2 の回転と平行移動を施して次を満たすようにできる:

$$\underline{\gamma(t_0) = O = (0, 0)}, \quad \underline{\dot{\gamma}(t_0) = v(1, 0)} \quad (v > 0).$$

とくに O の近くで、曲線はグラフ $y = f(x)$ ($f(0) = f'(0) = 0$) と表示される。

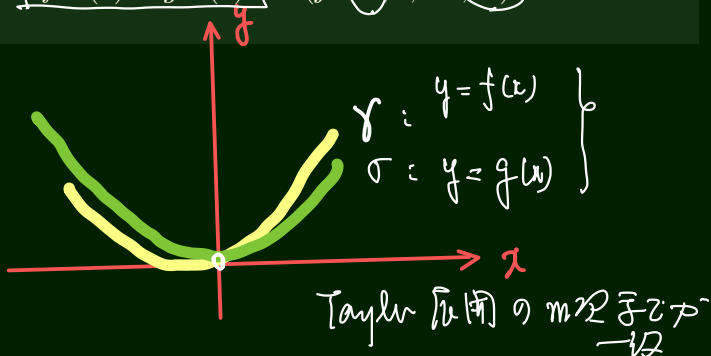


接触の次数

定義 (テキスト 16 ページ)

整数 $m \geq 2$ に対して, γ, σ が点 P で m 回の接触をするとは, これらが P で接線を共有し, さらに, 補題のように γ, σ を $y = f(x), y = g(x)$ と表示したとき, 次が成り立つことである:

$$\boxed{f^{(j)}(0) = g^{(j)}(0)} \quad (j = 0, 1, \dots, m)$$



目標 1

定理 (テキスト 17 ページ, 定理 2.4)

曲線 γ の t_0 における曲率円は, γ と $P := \gamma(t_0)$ において 2 次の接触をする. 逆に $\gamma(t_0)$ において 2 次の接触をする円は曲率円.

$\gamma(x) = (x, f(x))$ ($f(0) = f'(0) = 0$) としてよい.

$$\kappa(0) = \underline{f''(0)} \quad n(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

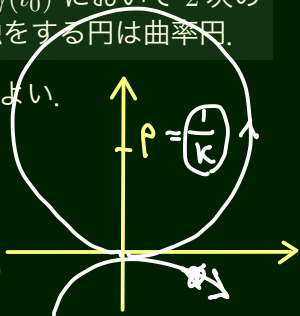
原点で x 軸に接する円のグラフ表示は

$$y = g(x) = p - \sqrt{p^2 - x^2} \quad (p > 0)$$

$$= p \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{p^2}} \right)$$

$$= p \left(\frac{1}{2} \frac{x^2}{p^2} + \dots \right)$$

$$\boxed{f''(0) = \frac{1}{p}}$$



$$x^2 + (y-p)^2 = p^2$$

$$y = p - \sqrt{p^2 - x^2}$$

閉曲線

- ▶ $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ が閉曲線 $\Leftrightarrow \exists a: \gamma(t+a) = \gamma(t)$. (周期関数)
- ▶ 周期 a の閉曲線の曲率関数は周期 a をもつ.

定義

弧長 s でパラメータ付けられた周期 l の閉曲線 $\gamma(s)$ に対して

$$T_\gamma := \int_0^l \kappa(s) ds \quad \text{を } \gamma \text{ の全曲率,}$$
$$i_\gamma := \frac{T_\gamma}{2\pi} \quad \text{を } \gamma \text{ の回転数という.}$$

閉曲線：例

レムニスケート (周期 2π)

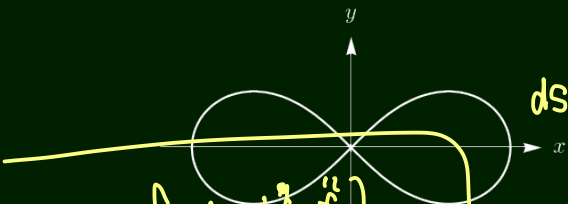
$$\gamma(t) = \left(\frac{\cos t}{1 + \sin^2 t}, \frac{\sin t \cos t}{1 + \sin^2 t} \right)$$

の全曲率は 0.

$$k(t) = \frac{\det(\dot{\gamma} \ \ddot{\gamma})}{|\dot{\gamma}|^3}$$

$$ds = \frac{ds}{dt} dt$$

$$s = \int |\dot{\gamma}| dt$$


$$\int k ds = \int \frac{\det(\dot{\gamma} \ \ddot{\gamma})}{|\dot{\gamma}|^2} dt = 0$$

ガウス写像

弧長でパラメータ付けられた曲線 $\gamma(s)$ に対して

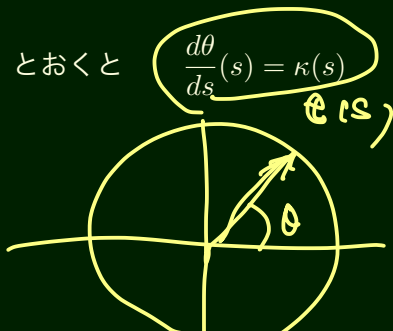
$$e: s \mapsto e(s) \in S^1 := \{(x, y); x^2 + y^2 = 1\}$$

をガウス写像という。とくに

$$e(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$$

とおくと

$$\frac{d\theta}{ds}(s) = \kappa(s)$$



$\int \kappa(s) ds$: θ の変り
道のり

目標 2

定理 (テキスト 30 ページ, 命題 3.1)

閉曲線の回転数は整数である。さらに、閉曲線の「連続変形」で回転数は不変である。

回転数 $\frac{1}{2\pi} \int_0^l \kappa(s) ds$

\mathbb{R} の値の $\int \in 2\pi \mathbb{Z}$ (元々整数)

問題 3-1

問題

正則な平面曲線の曲率中心の軌跡をその曲線の縮閉線という。サイクロイド

$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t) \quad (0 < t < 2\pi)$$

の縮閉線を求め、その特異点はどこか調べなさい。

$$r(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)} n(t)$$

問題 3-2

問題

パラメータ表示

$$\gamma_1(t) = (t, t^2) \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (\text{放物線})$$

$$\gamma_2(t) = (\operatorname{sech} t, t - \tanh t) \quad (t > 0) \quad (\text{追跡線})$$

の「全曲率」を求めなさい.