幾何学概論第一 (MTH.B211)

3: 曲率円・回転数

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2010/10/15(2020/10/22 訂正)

目標

定理 (テキスト 17 ページ，定理 2.4)
曲線 γ の t_0 における曲率円は，γ と $\mathrm{P} := \gamma(t_0)$ において 2 次の接触をする．逆に $\gamma(t_0)$ において 2 次の接触をする円は曲率円である．

定理 (テキスト 30 ページ，命題 3.1)
閉曲線の回転数は整数である．さらに，閉曲線の「連続変形」で回転数は不変である．

単位法線ベクトル

- $\gamma(t)$: $\mathbb{R}^2$ の正則曲線（= 正則にパラメータ付けられた平面曲線）

$$\boldsymbol{e}(t) := \frac{\dot\gamma(t)}{|\dot\gamma(t)|} \qquad \text{(進行方向の単位接ベクトル)}$$

$$\boldsymbol{n}(t) := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{e}(t) \qquad \text{(左向き単位法線ベクトル)}$$

単位法線ベクトル

- $\gamma(s) = (x(s), y(s))$: 弧長でパラメータ付けられた平面曲線 ($\Leftrightarrow |\gamma'(s)| = 1$)

$$\boldsymbol{e}(s) = (x'(s), y'(s)), \qquad \boldsymbol{n}(s) = (-y'(s), x'(s))$$

曲率半径・曲率中心

定義
曲線 $\gamma(t)$ の $t = t_0$ における

$$\text{曲率半径 } \rho(t_0) := \frac{1}{|\kappa(t_0)|}, \quad \text{曲率中心 } \sigma(t_0) := \gamma(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}\boldsymbol{n}(t_0)$$

曲率円 := 点 $\sigma(t_0)$ を中心とする半径 $\rho(t_0)$ の円

曲率円

Lemma
曲率円は $\gamma(t_0)$ で γ と接線を共有する．

注：曲率円は γ と $\gamma(t_0)$ において同じ進行方向をもつとする．
注：$\kappa(t_0) = 0$ のときは γ の接線を曲率円とよぶ．

グラフ表示の補題

補題
正則曲線 $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$，$t_0 \in I$ に対して $\mathbb{R}^2$ の回転と平行移動を施して次を満たすようにできる：

$$\gamma(t_0) = \mathrm{O} = (0,0), \qquad \dot\gamma(t_0) = v(1,0) \qquad (v > 0).$$

とくに O の近くで，曲線はグラフ $y = f(x)$ （$f(0) = f'(0) = 0$）と表示される．

接触の次数

定義 (テキスト 16 ページ)
整数 $m \geq 2$ に対して，γ，σ が点 P で m 次の接触をするとは，これらが P で接線を共有し，さらに，補題のように γ, σ を $y = f(x)$, $y = g(x)$ と表示したとき，次が成り立つことである：

$$f^{(j)}(0) = g^{(j)}(0) \qquad (j = 0, 1, \ldots, m).$$

目標 1

定理 (テキスト 17 ページ，定理 2.4)
曲線 γ の t_0 における曲率円は，γ と $\mathrm{P} := \gamma(t_0)$ において 2 次の接触をする．逆に $\gamma(t_0)$ において 2 次の接触をする円は曲率円．

$\gamma(x) = (x, f(x))$（$f(0) = f'(0) = 0$）としてよい．

$\kappa(0) =$ $\qquad$ $\boldsymbol{n}(0) =$

原点で x 軸に接する円のグラフ表示は

$$y = g(x) =$$

閉曲線

- $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$（$C^\infty$）が 閉曲線 $\Leftrightarrow$ $\exists a\colon \gamma(t+a) = \gamma(t)$．(周期 関数)
- 周期 a の閉曲線の曲率関数は周期 a をもつ．

定義
弧長 s でパラメータ付けられた周期 l の閉曲線 $\gamma(s)$ に対して

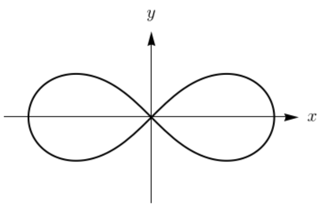
$$T_\gamma := \int_0^l \kappa(s)\,ds \quad \text{を } \gamma \text{ の全曲率},$$
$$i_\gamma := \frac{T_\gamma}{2\pi} \quad \text{を } \gamma \text{ の回転数という．}$$

閉曲線：例

レムニスケート（周期 2π）

$$\gamma(t) = \left(\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}, \frac{\sin t \cos t}{1+\sin^2 t}\right)$$

の全曲率は 0．



ガウス写像

弧長でパラメータ付けられた曲線 $\gamma(s)$ に対して

$$\boldsymbol{e}\colon s \mapsto \boldsymbol{e}(s) \in S^1 := \{(x,y)\,;\, x^2+y^2=1\}$$

をガウス写像という．とくに

$$\boldsymbol{e}(s) = \bigl(\cos\theta(s), \sin\theta(s)\bigr) \qquad \text{とおくと} \qquad \frac{d\theta}{ds}(s) = \kappa(s)$$

目標 2

定理 (テキスト 30 ページ，命題 3.1)
閉曲線の回転数は整数である．さらに，閉曲線の「連続変形」で回転数は不変である．

回転数 $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^l \kappa(s)\,ds$

問題 3-1

問題
正則な平面曲線の曲率中心の軌跡をその曲線の縮閉線という．サイクロイド

$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t) \qquad (0 < t < 2\pi)$$

の縮閉線を求め，その特異点はどこか調べなさい．

問題 3-2

問題
パラメータ表示

$$\gamma_1(t) = (t, t^2) \qquad (t \in \mathbb{R}) \qquad \text{(放物線)}$$
$$\gamma_2(t) = (\operatorname{sech} t, t - \tanh t) \qquad (t > 0) \qquad \text{(追跡線)}$$

の「全曲率」を求めなさい．