

幾何学概論第一 (MTH.B211)

3: 曲率円・回転数

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2010/10/15(2020/10/22 訂正)

目標

定理 (テキスト 17 ページ, 定理 2.4)

曲線 γ の t_0 における曲率円は, γ と $P := \gamma(t_0)$ において 2 次の接触をする. 逆に $\gamma(t_0)$ において 2 次の接触をする円は曲率円である.

定理 (テキスト 30 ページ, 命題 3.1)

閉曲線の回転数は整数である. さらに, 閉曲線の「連続変形」で回転数は不変である.

単位法線ベクトル

- ▶ $\gamma(t): \mathbb{R}^2$ の正則曲線 (= 正則にパラメータ付けられた平面曲線)

$$\mathbf{e}(t) := \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} \quad (\text{進行方向の単位接ベクトル})$$

$$\mathbf{n}(t) := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{e}(t) \quad (\text{左向き単位法線ベクトル})$$

単位法線ベクトル

- ▶ $\gamma(s) = (x(s), y(s))$: 弧長でパラメータ付けられた平面曲線
($\Leftrightarrow |\gamma'(s)| = 1$)

$$\mathbf{e}(s) = (x'(s), y'(s)), \quad \mathbf{n}(s) = (-y'(s), x'(s))$$

曲率半径・曲率中心

定義

曲線 $\gamma(t)$ の $t = t_0$ における

曲率半径 $\rho(t_0) := \frac{1}{|\kappa(t_0)|}$, 曲率中心 $\sigma(t_0) := \gamma(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}\mathbf{n}(t_0)$

曲率円 := 点 $\sigma(t_0)$ を中心とする半径 $\rho(t_0)$ の円

曲率円

Lemma

曲率円は $\gamma(t_0)$ で γ と接線を共有する .

注 : 曲率円は γ と $\gamma(t_0)$ において同じ進行方向をもつとする .

注 : $\kappa(t_0) = 0$ のときは γ の接線を曲率円とよぶ .

グラフ表示の補題

補題

正則曲線 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t_0 \in I$ に対して \mathbb{R}^2 の回転と平行移動を施して次を満たすようにできる:

$$\gamma(t_0) = O = (0, 0), \quad \dot{\gamma}(t_0) = v(1, 0) \quad (v > 0).$$

とくに O の近くで, 曲線はグラフ $y = f(x)$ ($f(0) = f'(0) = 0$) と表示される.

接触の次数

定義 (テキスト 16 ページ)

整数 $m \geq 2$ に対して, γ, σ が点 P で m 次の接触をするとは, これらが P で接線を共有し, さらに, 補題のように γ, σ を $y = f(x), y = g(x)$ と表示したとき, 次が成り立つことである:

$$f^{(j)}(0) = g^{(j)}(0) \quad (j = 0, 1, \dots, m).$$

目標 1

定理 (テキスト 17 ページ, 定理 2.4)

曲線 γ の t_0 における曲率円は, γ と $P := \gamma(t_0)$ において 2 次の接触をする. 逆に $\gamma(t_0)$ において 2 次の接触をする円は曲率円.

$\gamma(x) = (x, f(x))$ ($f(0) = f'(0) = 0$) としてよい.

$$\kappa(0) = \quad \quad \quad \mathbf{n}(0) =$$

原点で x 軸に接する円のグラフ表示は

$$y = g(x) =$$

閉曲線

- ▶ $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ (C^∞) が閉曲線 $\Leftrightarrow \exists a: \gamma(t+a) = \gamma(t)$ (周期関数)
- ▶ 周期 a の閉曲線の曲率関数は周期 a をもつ.

定義

弧長 s でパラメータ付けられた周期 l の閉曲線 $\gamma(s)$ に対して

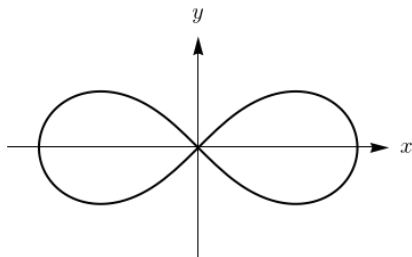
$$T_\gamma := \int_0^l \kappa(s) ds \quad \text{を } \gamma \text{ の全曲率,}$$
$$i_\gamma := \frac{T_\gamma}{2\pi} \quad \text{を } \gamma \text{ の回転数という.}$$

閉曲線：例

レムニスケート (周期 2π)

$$\gamma(t) = \left(\frac{\cos t}{1 + \sin^2 t}, \frac{\sin t \cos t}{1 + \sin^2 t} \right)$$

の全曲率は 0 .



ガウス写像

弧長でパラメータ付けられた曲線 $\gamma(s)$ に対して

$$e: s \mapsto e(s) \in S^1 := \{(x, y); x^2 + y^2 = 1\}$$

をガウス写像という．とくに

$$e(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)) \quad \text{とおくと} \quad \frac{d\theta}{ds}(s) = \kappa(s)$$

目標 2

定理 (テキスト 30 ページ, 命題 3.1)

閉曲線の回転数は整数である。さらに, 閉曲線の「連続変形」で回転数は不変である。

$$\text{回転数} \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^l \kappa(s) ds$$

問題 3-1

問題

正則な平面曲線の曲率中心の軌跡をその曲線の縮閉線という．サイクロイド

$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t) \quad (0 < t < 2\pi)$$

の縮閉線を求め，その特異点はどこか調べなさい．

問題 3-2

問題

パラメータ表示

$$\gamma_1(t) = (t, t^2) \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (\text{放物線})$$

$$\gamma_2(t) = (\operatorname{sech} t, t - \tanh t) \quad (t > 0) \quad (\text{追跡線})$$

の「全曲率」を求めなさい。