2020 年 10 月 15 日 (2020 年 10 月 22 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一（MTH.B211）講義資料 3

■お知らせ 前回の講義での曲線の描画は Mathematica® で行いました．参考までに Mathematica Notebook は講義 web ページに置きます．Mathematica は有償のソフトウェアで，東工大ではサイトライセンス契約をしていますがスタンドアローン版をインストールできるのは「大学所有の PC」ということで使い勝手が悪いのですが，絵を見るだけでしたらフリーの “Wolfram Player” が使えます．

描画をするだけなら他にもフリーソフトウェアを含むさまざまなソフトウェアが使えます．探してみましょう．

■前回の補足

- 答案に「題意が示された」というフレーズを使われた方が 2 名．山田は数学の文脈での「題意」という語の意味を知りません．広辞苑には「題の意味するところ」という語義があります．その意味ですか？数学の文脈では，「題意が示された」と「題意より」の 2 つの使い方を見たことがありますが，想像するに前者は「結論」後者は「仮定」の意味で題意を使っているようです．どちらが本当なんでしょうね．いずれにせよ，どちらの意味かを明確にしていただけないとこの語を解釈できません．毎年こういっていますが，未だに「どちらの意味である」ときちんと説明してくれた人はいません．

■前回までの訂正

- 前回の映写資料 C，15 ページの書き込み（$\operatorname{sech} t$ の微分）：$\operatorname{sech} t \tanh t \Rightarrow -\operatorname{sech} t \tanh t$.
- 前回の映写資料 C，15 ページの書き込み（一番下）：$\log\left(e^s + \sqrt{e^s - 1}\right) \Rightarrow \log\left(e^s + \sqrt{e^{2s} - 1}\right)$
- 講義資料 2, 3 ページ，例 2.1 の 1 行目：$\gamma : \widetilde{I} \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow \tilde{\gamma} : \widetilde{I} \to \mathbb{R}^2$
- 講義資料 2, 3 ページ，例 2.1 の 3 行目：$\tilde{\gamma}$ は γ から $\Rightarrow$ γ は $\tilde{\gamma}$ から
- 講義資料 2, 3 ページ，例 2.1 の 4 行目：$I = \widetilde{I} = \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ 上で
- 講義資料 2, 3 ページ，例 2.1 の 6 行目：$\tilde{\gamma}$ は γ から $\Rightarrow$ γ は $\tilde{\gamma}$ から
- 講義資料 2, 3 ページ，例 2.1 の 6 行目：$\hat{\gamma}$ はそうではない．$\Rightarrow$ $\hat{\gamma}$ からは得られない．
- 講義資料 2, 3 ページ，補題 2.2 の証明 3 行目：$\frac{d\varphi}{du}(t) \Rightarrow \frac{d\varphi}{du}(u)$
- 講義資料 2, 3 ページ，定理 2.3 の証明 1 行目：$u = \varphi(t) \Rightarrow t = \varphi(u)$
- 講義資料 2, 3 ページ，脚注 1：$\frac{d\tilde{\gamma}}{dt} = \frac{du}{dt}\frac{d\gamma}{du}$ $(u = \varphi(t)) \Rightarrow \frac{d\tilde{\gamma}}{du} = \frac{dt}{du}\frac{d\gamma}{dt}$ $(t = \varphi(u))$
- 講義資料 2, 4 ページ，定理 2.10 の証明 2 行目：$ds/dt = 0 \Rightarrow ds/dt \neq 0$

■授業に関する御意見

- 課題では 1 つの解答しか出せないが，授業ではどちらの解説も行ってくれるのでありがたいです． **山田のコメント：** 実はこれが授業の本題かも．
- できればもう少し講義の本題に入るのを早めていただきたいです． **山田のコメント：** 最初から本題のつもりですが．
- 授業ペース，良い感じでした．ありがとうございました． **山田のコメント：** どういたしまして．
- ペンの太さ変えてくださりありがとうございます！とても見やすくなりました． **山田のコメント：** よかったです．なれぬ道具ゆえ，最適な形にするには時間がかかりそうですね．
- アーカイブを残していただきありがとうございます． **山田のコメント：** はい．
- 復習を所々に入れていただいてありがたいです． **山田のコメント：** そうですね．
- 丁寧に解説していただいてとても勉強になりました． **山田のコメント：** うんうん．
- 具体的な曲線や曲面をソフトウェアでお絵かきするのは見てて楽しいのでこれからの **山田のコメント：** はい．
- 弧長によりパラメータ付られた曲線の条件 $|\dot{\gamma}| = 1$ から $\dot{\gamma}(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ とおいて積分する発想は思いつかなかった． **山田のコメント：** ですよね．
- 懸垂線が糸を垂らしたときにできる曲線でる（原文ママ：である？）ことは知っていたが，アーチ橋のカーブに懸垂線が出てくることは知らなかった． **山田のコメント：** 結構知られていることだと思っていました．

■質問と回答

質問 1： 第一回で「弧長によりパラメータ付けられているとは $|\gamma'(s)| = 1$ が恒等的に成り立つこと」とありますが，正則にパラメータ付けられた曲線はパラメータ変換により弧長パラメータで表示できるという定理の証明で $|\tilde{\gamma}'(s)| = 1$ ということを確かめていないことに疑問を感じました． **お答え：**「. . . とおけばよい.」「. . . とすれば結論が得られる.」は数学の文脈では「. . . とする

と，容易に結論が示せる」ということ．容易に示せるはずなので，自分で確かめること（というと「テストでこのフレーズを使っていいの」という阿呆な質問がくることがありますが「容易に示せる」というのが重要．採点者が容易かどうかを判断します）．

質問 2： 命題 2.9 の主張は「弧長パラメータから弧長パラメータへのパラメータ変換は始点の位置を除いて 1 つだけ存在する」ということでしょうか？ **お答え：**はい．

質問 3： 弧長パラメータをパラメータとする曲線は，弧長にパラメータづけされている，ということは分かったのですが，逆はどうなのでしょうか？（弧長によりパラメータづけられている曲線のパラメータは弧長パラメータとは限らない気がします）．

お答え： 言葉の使い方が不適切かもしれませんが，この講義では「$\gamma(s)$ の s が弧長パラメータである」ということと「$\gamma(s)$ が弧長 s によりパラメータづけられている」は同義で，どちらも $|\gamma'(s)|=1$ の意味で使います．

質問 4： 正則曲線から弧長によってパラメータ付けられる曲線を得た場合，この曲線は一意に定まりますか？（$\psi := \int_{t_0}^{t} |\gamma'|\,dt$ の t_0 のとり方で区間が横に定数分ずれる以外）． **お答え：**はい．命題 2.9 からわかる．

質問 5： パラメータ変換の任意性のくだりにおいて $\frac{ds}{dt}<0$ を議論しないのはなぜですか． **お答え：**この講義の文脈では曲線は「向きがついているもの」と考える．実際，反時計回りの円（曲率正）と時計回りの円（曲率負）は違う曲線とみなしたい．

質問 6： パラメータ変換の定義で，φ は $\widetilde{I}$ 上で $\frac{d\varphi}{du}>0$ を満たすとされていますが，連続な全単射なら $\frac{d\varphi}{du}<0$ でも良さそうに見えます（$\varphi(u)=-u$ など）．実際，これはパラメータ変換になりますか？またならない場合，なぜなりませんか？

お答え： なりません．定義を満たさないからです．が「ならない」というよりは「しない」（定義なのだから）ですね．

質問 7： 曲率が定数の場合は定数倍しても円のままなのに対して，問題 1-1 のように曲率が定数でない場合は曲線が全く違う見た目になることに驚きました．そこで曲率が互いに定数倍で表せる 2 曲線で相似になるものは存在するのでしょうか．

お答え： 弧長パラメータで表された $\gamma(s)$ に対して相似拡大 $\tilde{\gamma}(s):=k\gamma(s)$（$k\neq\pm 1$） の s は弧長ではない．$\tilde{\gamma}(s)$ の曲率 $\tilde{\kappa}(s)$ と γ の曲率 $\kappa(s)$ の間には $\tilde{\kappa}(s)=\kappa(s)/k$ なる関係があるが，弧長を決めて対応しているのではない．弧長パラメータに関して曲率が定数倍の関係になっていて，相似かつ合同でないならば定曲率であることが示せる．

質問 8： γ と $\tilde{\gamma}$ の曲率が異なり，$\tilde{\gamma}$ は γ のパラメータ変換で得られないが，γ と $\tilde{\gamma}$ の像が一致するような正則にパラメータ付けられた曲線 γ と $\tilde{\gamma}$ の例はありますか？ **お答え：**ありません．正則曲線 γ と $\tilde{\gamma}$ の像が一致するなら弧長パラメータに変換すると同じパラメータ表示が得られませんか？

質問 9： $\sqrt{2}=1$ の説明の際に，図形が収束しても長さが収束するとは限らないとありましたが図形が収束して長さが収束する場合は具体的にどのような例がありますか． **お答え：**なんでもよいがたとえば $\gamma_a(t):=(t,a(1-t^2))$ $(-1\leqq t\leqq 1)$．$a\to 1$ とすると $(-1,0)$ と $(1,0)$ を結ぶ線分に収束するが，長さも 2 に収束する．

質問 10： $\sqrt{2}=1$ の話について「図形が収束する」というのはどのように定義できますか．

お答え： そこをちゃんと定義していないからこの問題が起きている．あなたならどう定義しますか？

質問 11： パラメータ変換の定義とパラメータ変換でない例の説明について，パラメータ変換でないことをいうときに，その次のページの補題の内容を満たさないから，と説明されていましたが，これは定義に従わないから，という理由付けでは不十分なのでしょうか（後略）． **お答え：**定義に従わないから，という説明をした気がしますが．「定義に従わない」のは容易に示せますね．

質問 12： 問 2-1 は $\frac{d}{da}\mathrm{L}(a,1-a)$ の値を具体的に求めることはできるのでしょうか．

お答え： $a=0,1$ 以外の場合は被積分関数の原始関数が初等関数でない（楕円積分）ので，“求めることはできない”とも言えます．

質問 13： 問題 2-2 でなぜ 3 回微分まで議論するのでしょうか． **お答え：**しちゃだめですか？というのが第一の回答．第二の回答（講義の範囲外）：これが「カスプ」の判定条件．講義でちょっと説明する．

質問 14： 黒板 C 9 枚目：$\frac{d^2t}{du^2}\frac{d\gamma}{dt}+\left(\frac{dt}{du}\right)^2\frac{d^2\gamma}{dt^2}$ の $\frac{d^2t}{du^2}\frac{d\gamma}{dt}$ の消し方が分かりません（同様のものがもう 1 件）．

お答え： 行列式の列基本変形．言わなかったっけ．

質問 15： 前回の質問の答えは $\dot{\gamma}(0)$ が存在しないからなめらかでないで良いですか？

お答え： どの質問か特定してください．その上で「なめらかな曲線」の雑な定義を今回挙げましたが，それに照らし合わせてください．

質問 16： 一筆書きで描ける平面図形はグラフ上の曲率半径が分かればパラメータ付けられた曲線で表せられるということでしょうか．

お答え： 意味がわかりません．文が変ですが，語「グラフ」のここでの意味がわかりません．数学の文脈では「グラフ」が少なくとも 2 つの意味で使われています．「$y=f(x)$ のグラフ」という「グラフ」と一筆書きでよくでてくる「グラフ」は別のものでは？

質問 17： 正則である曲線について今は議論していますが，正則でない曲線の研究はあまりすすめられていないのですか？

お答え： いいえ．たとえば梅原・佐治・山田「特異点をもつ曲線と曲面の微分幾何学」（丸善出版，2017）．

質問 18： 電線のたるみがカテナリであることの具体的な導き方が分かりませんでした． **お答え：**力学などの教科書にあると思う．曲線の小さな部分にはたらく重力と，両端にはたらく張力が釣り合っている，という式から微分方程式を立てる．

質問 19： 講義では曲率と曲率関数という言葉が混じって出てきましたが，特に意味の違いがないということで良いですか？

お答え： 関数であることを強調したいときに曲率関数，値を強調したいときに曲率という．

質問 20： 曲率関数によっては部分的に円の曲率関数（山田注：この場合は曲率と行った方が適切か）と一致したりしますが，これは元の関数（山田注：曲線のことか）と円にどのような関係がありますか． **お答え：**文章が変だが，想像するに「今回やります」．

質問 21： 曲率という概念が生まれた動機が知りたいです．（授業受けてもなお「何のための量？」となっています）．

お答え： 動機は推測にしかならないので分からない．何のため？は授業で 2 つくらい説明したが，それは理解した上でしっくりこないのでしょうか？それとも説明した内容が入っていない？今回もう一つの説明をします．

質問 22： Riemann 幾何学の計量と関係のある概念は出てきますか？ **お答え：**「第二」

質問 23： 定理 2.3 の証明で $u=\varphi(t)$ とおいているので $\frac{d\varphi}{du}=1$ ではないでしょうか． **お答え：**「前回までの訂正」参照．

質問 24： 今回のパラメータ変換は，曲面における同様の変換についても考えることは可能か．また今後の講議（原文ママ）で触れることはあるか． **お答え：**日本語が変．「第二」で扱う（シラバスを見よ）．「講議」は誤字．気をつけよ，と第 1 回講義で述べた．

3 曲率円・回転数

3.1 曲率円と接触

正則にパラメータ付けられた平面曲線 $\gamma\colon I\to\mathbb{R}^2$ に対して

$$(3.1)\qquad \boldsymbol{e}(t):=\frac{\dot\gamma(t)}{|\dot\gamma(t)|},\qquad \boldsymbol{n}(t):=(\boldsymbol{e}(t)\ \text{を反時計周りに}\ 90^\circ\ \text{回転させたもの})=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{e}(t)$$

とおき，$\boldsymbol{e}$ を γ の（進行方向の）**単位接ベクトル**，$\boldsymbol{n}(t)$ を γ の**左向き単位法線ベクトル**[*1] という．とくに $\gamma(s)$ が弧長 s でパラメータ付けられているときは $\boldsymbol{e}(s)=\gamma'(s)$ $('=d/ds)$ である．

定義 3.1 (テキスト 15 ページ)**.** 正則にパラメータ付けられた平面曲線 $\gamma\colon I\to\mathbb{R}^2$ 上の点 $t_0\in I$ における曲率 $\kappa(t_0)$ が 0 でないとき，$\rho(t_0):=1/|\kappa(t_0)|$ を t_0 における**曲率半径**，$\sigma(t_0):=\gamma(t_0)+\frac{1}{\kappa(t_0)}\boldsymbol{n}(t_0)$ を**曲率中心**という．ただし $\boldsymbol{n}$ は γ の左向き単位法線ベクトルである．

補題 3.2. 定義 3.1 の状況で，$\sigma(t_0)$ を中心とする半径 $\rho(t_0)$ の円 C_{t_0} は，$\gamma(t_0)$ で γ と接線を共有する．

定義 3.3. 定義 3.1 の状況で，$\sigma(t_0)$ を中心とする半径 $\rho(t_0)$ の円 C_{t_0} に点 $\gamma(t_0)$ で γ と同じ進行方向をもつように向きをつけたものを**曲率円**[*2]とよぶ．

注意 3.4. 曲率 $k:=\kappa(t_0)$ が 0 でない点 t_0 における γ の曲率円は

$$c(u):=\sigma(t_0)+\frac{1}{k}\bigl(-(\cos ku)\boldsymbol{n}(t_0)+(\sin ku)\boldsymbol{e}(t_0)\bigr)\qquad k:=\kappa(t_0)$$

とパラメータ表示される．とくに曲率円の曲率は $\kappa(t_0)$ である．また $\kappa(t_0)=0$ のときは，$\gamma(t_0)$ における γ の接線を（半径無限大の）曲率円とよぶことにする．

補題 3.5 (テキスト 16 ページ)**.** 正則にパラメータ付けられた平面曲線 $\gamma\colon I\to\mathbb{R}^2$ に対して，$t_0\in I$ を一つ固定する．$\mathbb{R}^2$ の回転と平行移動を施して次を満たすようにできる：

$$(3.2)\qquad \gamma(t_0)=\mathrm{O}=(0,0),\qquad \dot\gamma(t_0)=v(1,0)\qquad (v>0).$$

このとき O の近くで，曲線はグラフ $y=f(x)$ と表示される．ただし f は $f(0)=f'(0)=0$ をみたす C^∞-関数である．

証明. 単位接ベクトル，左向き単位法線ベクトルを用いて $P:=(\boldsymbol{e}(t_0),\boldsymbol{n}(t_0))$ とおくと $P\in\mathrm{SO}(2)$. $\tilde\gamma(t):=P^{-1}(\gamma(t)-\gamma(t_0))$ とおくとこれは (3.2) の条件を満たす．この成分を $\tilde\gamma(t)=\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ とおくと，$x(t_0)=y(t_0)=\dot y(t_0)=0$, $\dot x(t_0)=v>0$，とくに $t\mapsto x(t)$ は $t=t_0$ の近くで C^∞-級の逆関数 $x\mapsto t(x)$ をもち，x をパラメータとすると結論が得られる． □

定義 3.6 (テキスト 16 ページ)**.** 平面曲線 $\gamma(t)$, $\sigma(u)$ がが点 $\mathrm{P}=\gamma(t_0)=\sigma(u_0)$ を共有するとき，これらが P で 1 **次の接触**をするとは，γ と σ のそれぞれ t_0, u_0 における接線が向きをこめて一致することである．

2020 年 10 月 15 日 (2020 年 10 月 22 日訂正)

[*1] 単位接ベクトル：the unit tangent vector; (左向き) 単位法線ベクトル：the (left-ward) unit normal vector

[*2] 曲率円：the osculating circle; 曲率半径：the radius of curvature.

注意 3.7. 定義 3.6 の意味で γ と σ が 1 次の接触をするならば，同じ回転と平行移動を施して，$\mathrm{P}=(0,0)$，γ は $y=f(x)$ のグラフ，σ は $y=g(x)$ のグラフで表される．

定義 3.8 (テキスト 16 ページ)**.** 整数 $m \geqq 2$ に対して，γ，σ が点 P で m **次の接触**をするとは，これらが P で 1 次の接触をしており，さらに注意 3.7 のように表示したとき，次が成り立つことである：

$$f^{(j)}(0)=g^{(j)}(0) \qquad (j=0,1,\dots,m).$$

定理 3.9 (テキスト 17 ページ，定理 2.4)**.** 曲線 γ の t_0 における曲率円は，γ と $\mathrm{P}:=\gamma(t_0)$ において 2 次の接触をする．逆に $\gamma(t_0)$ において 2 次の接触をする円は曲率円である．

証明. 注意 3.7 のように点 $\mathrm{P}=\mathrm{O}$ で，曲線 γ は $y=f(x)$（$f(0)=f'(0)=0$）とグラフ表示されているとする．このとき例 2.4 で見たように，O における曲線の曲率は $k:=f''(0)$ である．原点で γ と接する円の中心は，原点を通り x 軸に直交する直線，すなわち y 軸上にあるので，そのような円は原点の近くで $y=g(x):=r\left(1-\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}\right)$ とグラフ表示される．とくに $r\neq 0$ のとき $g''(0)=1/r$，$r=0$ なら $g''(0)=0$ なので，結論が得られる． □

3.2 全曲率と回転数

正則にパラメータ付けられた平面曲線 $\gamma\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ が周期 a をもつ周期関数である, すなわち $\gamma(t+a)=\gamma(t)$ を満たすとき**閉曲線**という．周期 a の閉曲線の曲率関数 κ はまた周期 a をもつ．

弧長 s でパラメータ付けられた周期 l の閉曲線 $\gamma(s)$ に対して[*3]

$$T_\gamma := \int_0^l \kappa(s)\,ds \quad を\ \gamma\ の\textbf{全曲率}, \qquad i_\gamma := \frac{T_\gamma}{2\pi} \quad を\ \gamma\ の\textbf{回転数}という．$$

定理 3.10 (テキスト 30 ページ，命題 3.1)**.** 閉曲線の回転数は整数である．さらに，閉曲線の「連続変形」で回転数は不変である．

事実 3.11.
- 単純閉曲線，すなわち自己交叉をもたない閉曲線の回転数は 1 または -1 である（テキスト 31 ページ，定理 3.2）．
- 2 つの閉曲線が正則曲線を保つ連続変形で移り合うための必要十分条件はその回転数が一致することである（テキスト 33 ページ，定理 3.3；ホイットニーの定理）．

問題

3-1 正則な平面曲線の曲率中心の軌跡をその曲線の**縮閉線**[*4]という．サイクロイド

$$\gamma(t)=(t-\sin t, 1-\cos t) \qquad (0<t<2\pi)$$

の縮閉線を求め，その特異点はどこか調べなさい．

3-2 パラメータ表示 $\gamma_1(t)=(t,t^2)$ ($t\in\mathbb{R}$) で与えられる**放物線** $\gamma_2(t)=(\operatorname{sech} t, t-\tanh t)$ ($t>0$) で与えられる**追跡線**[*5]の「全曲率」を求めなさい．

[*3] 全曲率：the total curvature; 回転数：the rotation index.
[*4] 縮閉線：the evolute
[*5] 放物線：the parabola；追跡線：the tractrix.