

幾何学概論第一 (MTH.B211)

おしらせ・コメント

山田光太郎

`kotaro@math.titech.ac.jp`

`www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-1/`

東京工業大学理学院数学系

2020/10/22

お知らせ

- ▶ 32名の方から課題の提出がありました。評点およびマーク済みの答えは t2schola におきます。
- ▶ 次回 10月29日に定期試験の予告をいたします（メタ予告）
- ▶ 講義予定の変更をしました。

		授業内容
10月01日	1	平面曲線の基本定理
10月08日	2	パラメータ変換と弧長
10月15日	3	曲率円/閉曲線
10月22日	4	フルネ・セシの公式
10月29日	5	陰関数定理
11月05日	6	空間曲線の基本定理
11月12日	試	試験

授業の感想など

- ▶ 資料の問題をみていて、パラメータのとり方で混乱してしまうことがあったのですが、これは慣れも必要なのですかね
.... 個人的には動機がよくわからないと内容も飲み込みにくいです....

山田のコメント： 動機をわかろうとすることも大事では？

- ▶ たくさんの具体例を授業で取り上げているので、もしかして実際の研究では具体例を知っていることがとても重要なのではないかと思った。

山田のコメント： そうかも。

- ▶ 授業に限らずあらゆる場面でムンクさん（叫びちゃん）がいるのが気になります。（嫌という意味ではありません）もしかしてどうでしょうファンですか？

山田のコメント： いいえ。

- ▶ 後ろの方、叫びちゃんというのですね。

山田のコメント： 商品名は「ムンクさん」。

- ▶ 日本数学会賞秋季賞の受賞、おめでとうございます！！

山田のコメント： ありがとうございます♡

質問と回答

Q

等長変換, 合同変換で写像を構成しましたが, 同じように閉曲線の「連続変形」では何か写像を考えないのでしょうか. 写像を構成すれば回転数が不変であることなどを式で表現できると思いました.

どの写像で?

A

「写像を構成する」という言葉の使われ方がおかしい気がしますのでご質問の意味が読み取れません.

아예 p29 정렬하라. 同題

質問と回答

Q

(3.1) の式で与えられる $e(t)$ と $n(t)$ ですが、 $e(t)$ と $n(t)$ はどちらも 2×1 の行列という認識でよろしいのでしょうか。 $e(t)$ は $\dot{\gamma}(t)$ のスカラー倍で定義されているので、 $e(t)$ が 2×1 の行列の場合 $\dot{\gamma}(t)$ も 2×1 の行列ということになりますが、その認識で正しいでしょうか。

正しい

A

列ベクトルとみなしています。行列をかけたり、行列式をとる際は列ベクトルとみなすが、時々手を抜いて横に書いたりします。

$$x \cdot y = {}^t x y \quad (x, x_1) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

「認識」は哲学用語 (=cognition)? それとも日常用語 (=「物事を見定めその意味を理解すること」(広辞苑))? もっと日常的な語に置き換えた方が適切だと思います。

質問と回答

$$k = \frac{d\alpha(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma})}{|\dot{\gamma}|^3}$$

t_0 : 特異点

Q

正則でないパラメータ付けをされた曲線（言い方が難しいですが $\exists t_0$ s.t. $\dot{\gamma}(t_0) = 0$ なる曲線 γ ということです）では、 t_0 で曲率を定義できないと認識しています。その点で図形がとがっていると思うのですが、そのとがり具合を表す数学的な量は何かありますか？

$$\gamma(t) = (t^3, 0), \quad \gamma(t) = (t^3, t^4)$$

A

前回挙げた カスプ には「カスプ的曲率」が定義できる。
前回紹介した 梅原-佐治-山田 の本参照。

$$(t^2, t^3)$$

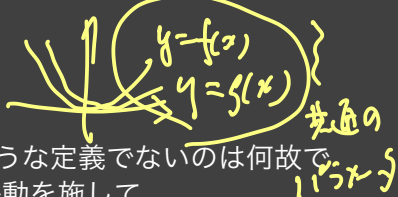


$$y = \sqrt[3]{x^4}$$

C¹-級

質問と回答

接触順序



Q

1 次の接触と 2 次以上の接触が同じような定義でないのは何故ですか。点を共有していて回転と平行移動を施して

$f'(0) = g'(0) = 0$ では 1 次の接触の定義になりませんか。

A

はい、それでも定義になります。本当はパラメータや位置によらない定義をしたいが 2 次以上では結構面倒くさいのでグラフ表示にしました。

1 次のときは、パラメータ・位置によらない定義が簡単にできるので、グラフ表示を使わない形にしました。

- ▶ (2 次以上の接触をグラフを用いなくてパラメータ表示により定義する方法もあります。テキスト 18 ページ、命題 2.5 参照)
- ▶ 2 次の接触を定義するだけなら「接触円を共有する」でもよいですね。

質問と回答

Q

曲線を m 次近似 ($m \geq 3$) できる円や直線のような図形はありますか。円は 2 次近似まで、直線は 1 次近似まででしたが。

A

たとえば二次曲線だとどうなります？

質問と回答

$$\underline{C^\infty \supset C^\infty}$$

実解析的関数の
原点の近くで必ず
一致する
元の関数
の既

Q

2つの正則にパラメータづけられた曲線 γ, σ が一致するかを調べるときに「 σ, γ に適当な移動を施して原点 $(0,0)$ に共有点を作り、それを注意 3.7, 定義 3.8 のよ~~う~~にして原点近傍で

$y = f(x), y = g(x)$ と表し、 $f^{(m)}(0) = g^{(m)}(0) (m = 0, 1, 2, \dots)$ が成立するか調べる」という操作をすれば γ と σ が (少なくとも局所的には) 一致していることが確かめられると考えたのですが、この議論は妥当ですか。

$$f = g + h \text{ の分解}$$

A

妥当でない。実際 $h^{(m)}(0) = 0 (m = 0, 1, 2, \dots)$ かつ $h(x) \neq 0 (x \neq 0)$ となるような C^∞ -級関数 h が存在する。

$$h^{(m)}(0) = 0$$

$$h(x) = \begin{cases} e^{-1/|x|} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$



質問と回答

Q

今回の授業で「正則にパラメータ付けられた平面曲線」について考えている時と「弧長でパラメータづけられた曲線」を考えているときがありましたが、どのようなことに対して前者（後者）を考えているのかがよく掴めませんでした。例えば閉曲線の全曲率の定義では後者で考えていましたが、曲率自体は別のパラメータで考えることもできるし、弧長パラメータを用いなくても同じような定義はつくれるのではないかと思いました。そこをあえて弧長パラメータづけられた曲線で定義しているのはなぜでしょうか。微小区間のとり方はパラメータのとり方に依存すると思うのでパラメータを指定することは必要だと思いののですが、弧長を使って定めると考えやすさ等があるのでしょうか。

A

$$\cdot \gamma' = (\cos \theta, \sin \theta) \cdot \theta' = \kappa$$

弧長でない曲線の全曲率の求め方は、たとえば黑板の 11 ページ、微小区間のとり方の違いは「置換積分の公式」。
弧長を使うのは $\theta' = \kappa$ という式の①が弧長に関する微分だから。

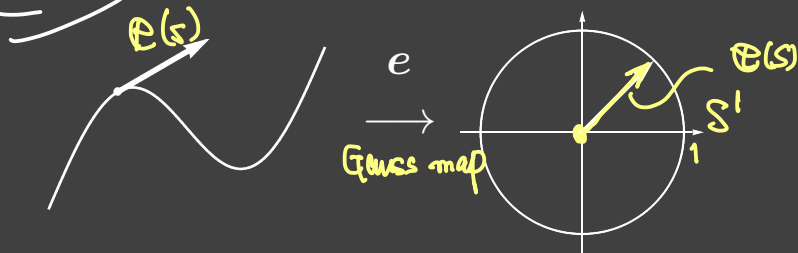
質問と回答

Q

ある閉曲線の回転数とは「その閉曲線上を1周するとき、正味何回転するか」という問いに対する答えである、という認識をして大丈夫ですか？

A

認識するのは自由ですから、認識して大丈夫かどうかはわかりませんが、事実としては不適切。「正味何回転」の主語がありません。「ガウス写像が円周上を何回転」は正しいと思います。



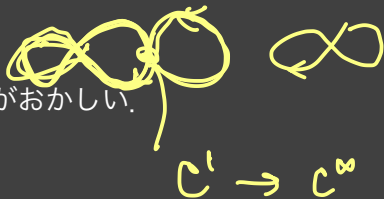
質問と回答

Q

ホイットニーの定理によって、正則曲線の回転数による同値類を考えると、閉曲線の回転数は整数なので、演算を2つの閉曲線の始点と終点をつなげる操作とすれば、同値類は \mathbb{Z} と同型な群を成すと思います。ここで単位原は回転数0の曲線になると思うのですが、回転数0の閉曲線は1点を表すから、常に $\dot{\gamma}(t) = 0$ となり、正則曲線の集合を考えていたはずが、正則でない閉曲線が含まれてしまうことになると思うのですが、どこがおかしいのでしょうか。

A

「回転数0の閉曲線は1点を表す」がおかしい。

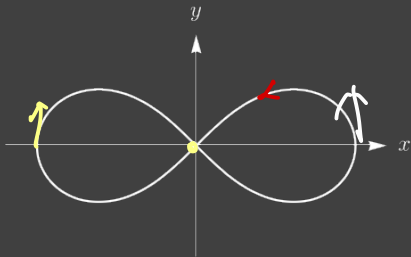


レムニスケート

レムニスケート (周期 2π) $-\pi$ π

$$\gamma(t) = \left(\frac{\cos t}{1 + \sin^2 t}, \frac{\sin t \cos t}{1 + \sin^2 t} \right)$$

の全曲率は 0.



質問

Q

解析的な質問だが、初等関数で積分できる（できない）ことをどのように判定するのか。

A

Liouville による判定法がある。最近はもっと進んだ判定法があるらしい。

空白ページ

この後、短い休憩をとり、2つの「講義」を行います。
質問などをチャットで行なう場合は、全員宛てにしてください

3 曲率円・回転数（補足）

4 フルネ・セレの公式