

# 幾何学概論第一 (MTH.B211)

お知らせ・コメント

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2020/10/22

## お知らせ

- ▶ 32 名の方から課題の提出がありました。評点およびマーク済みの答えは t2schola におきます。
- ▶ 次回 10 月 29 日に定期試験の予告をいたします (メタ予告)
- ▶ 講義予定の変更をしました。

		授業内容
10 月 01 日	1	平面曲線の基本定理
10 月 08 日	2	パラメータ変換と弧長
10 月 15 日	3	曲率円/閉曲線
10 月 22 日	4	フルネ・セレの公式
10 月 29 日	5	陰関数定理
11 月 05 日	6	空間曲線の基本定理
11 月 12 日	試	試験

## 授業の感想など

- ▶ 資料の問題をみていて、パラメータのとり方で混乱してしまうことがあったのですが、これは慣れも必要なのですかね...。個人的には動機がよくわからないと内容も飲み込みにくいです...。  
**山田のコメント:** 動機をわかろうとすることも大事では?
- ▶ たくさんの具体例を授業で取り上げているので、もしかして実際の研究では具体例を知っていることがとても重要なのではないかと思った。  
**山田のコメント:** そうかも。
- ▶ 授業に限らずあらゆる場面でムンクさん (叫びちゃん) がいるのが気になります (嫌という意味ではありません) もしかしてどうでしょうファンですか?  
**山田のコメント:** いいえ。
- ▶ 後ろの方、叫びちゃんというのですね。  
**山田のコメント:** 商品名は「ムンクさん」。
- ▶ 日本数学会賞秋季賞の受賞、おめでとございます!!  
**山田のコメント:** ありがとうございます♡

## 質問と回答

Q

等長変換, 合同変換で写像を構成しましたが, 同じように閉曲線の「連続変形」では何か写像を考えないのでしょうか. 写像を構成すれば回転数が不変であることなどを式で表現できると思います.

A

「写像を構成する」という言葉の使われ方がおかしい気がしますのでご質問の意味が読み取れません.

## 質問と回答

Q

(3.1) の式で与えられる  $e(t)$  と  $n(t)$  ですが,  $e(t)$  と  $n(t)$  はどちらも  $2 \times 1$  の行列という認識でよろしいのでしょうか.  $e(t)$  は  $\dot{\gamma}(t)$  のスカラー倍で定義されているので,  $e(t)$  が  $2 \times 1$  の行列の場合  $\dot{\gamma}(t)$  も  $2 \times 1$  の行列ということになりますが, その認識で正しいでしょうか.

A

列ベクトルとみなしています. 行列をかけた時, 行列式をとる際は列ベクトルとみなすが, 時々手を抜いて横に書いたりします.

「認識」は哲学用語 (=cognition)? それとも日常用語 (=「物事を見定めその意味を理解すること」(広辞苑))? もっと日常的な語に置き換えた方が適切だと思います.

## 質問と回答

Q

正則でないパラメータ付けをされた曲線 (言い方が難しいですが  $\exists t_0$  s.t.  $\dot{\gamma}(t_0) = 0$  なる曲線  $\gamma$  ということです) では,  $t_0$  で曲率を定義できないと認識しています. その点で図形がとがっていると思うのですが, そのとがり具合を表す数学的な量は何かありますか?

A

前回挙げた「カスプ」には「カスプの曲率」が定義できる. 前回紹介した梅原-佐治-山田の本参照.

## 質問と回答

Q

1 次の接触と 2 次以上の接触が同じような定義でないのは何故ですか. 点を共有して回転と平行移動を施して  $f'(0) = g'(0) = 0$  では 1 次の接触の定義になりませんか.

A

はい, それでも定義になります. 本当はパラメータや位置によらない定義をしたいが 2 次以上では結構面倒くさいのでグラフ表示にしました.

1 次ときは, パラメータ・位置によらない定義が簡単にできるので, グラフ表示を使わない形にしました.

- ▶ 2 次以上の接触をグラフを用いないでパラメータ表示により定義する方法もあります. テキスト 18 ページ, 命題 2.5 参照.
- ▶ 2 次の接触を定義するだけなら「接触円を共有する」でもよいですね.

## 質問と回答

Q

曲線を  $m$  次近似 ( $m \geq 3$ ) できる円や直線のような図形はありますか. 円は 2 次近似まで, 直線は 1 次近似まででしたが.

A

たとえば二次曲線だとどうなります?

## 質問と回答

Q

2つの正則にパラメータづけられた曲線  $\gamma, \sigma$  が一致するかを調べるときに「 $\sigma, \gamma$  に適当な移動を施して原点  $(0, 0)$  に共有点を作り、それを注意 3.7, 定義 3.8 のようにして原点近傍で  $y = f(x), y = g(x)$  と表し、 $f^{(m)}(0) = g^{(m)}(0)$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) が成立するか調べる」という操作をすれば  $\gamma$  と  $\sigma$  が (少なくとも局所的には) 一致していることが確かめられると考えたのですが、この議論は妥当ですか。

A

妥当でない。実際  $h^{(m)}(0) = 0$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) かつ  $h(x) \neq 0$  ( $x \neq 0$ ) となるような  $C^\infty$ -級関数  $h$  が存在する。

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/|x|} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

幾何学講座 1

おしらせ・コメント

2020/10/22

9 / 1

幾何学講座 1

おしらせ・コメント

2020/10/22

10 / 1

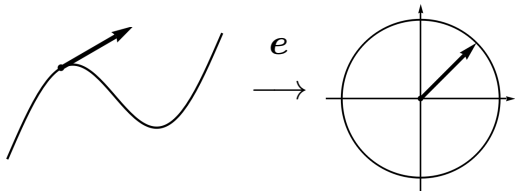
## 質問と回答

Q

ある閉曲線の回転数とは「その閉曲線上を 1 周するとき、正味何回転するか」という問いに対する答えである、という認識をして大丈夫ですか？

A

認識するのは自由ですから、認識して大丈夫かどうかはわかりませんが、事実としては不適切！「正味何回転」の主語がありません。「ガウス写像が円周上を何回転」は正しいと思います。



幾何学講座 1

おしらせ・コメント

2020/10/22

11 / 1

幾何学講座 1

おしらせ・コメント

2020/10/22

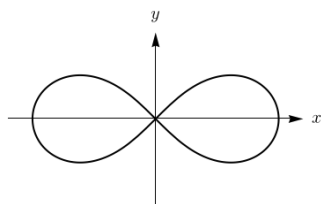
12 / 1

## レムニスケート

レムニスケート (周期  $2\pi$ )

$$\gamma(t) = \left( \frac{\cos t}{1 + \sin^2 t}, \frac{\sin t \cos t}{1 + \sin^2 t} \right)$$

の全曲率は 0.



幾何学講座 1

おしらせ・コメント

2020/10/22

13 / 1

幾何学講座 1

おしらせ・コメント

2020/10/22

14 / 1

## 空白ページ

## 質問と回答

Q

今回の授業で「正則にパラメータづけられた平面曲線」について考えている時と「弧長でパラメータづけられた曲線」を考えているときがありましたが、どのようなことに対して前者(後者)を考えているのがよく掴めませんでした。例えば閉曲線の全曲率の定義では後者で考えていましたが、曲率自体は別のパラメータで考えることもできるし、弧長パラメータを用いなくても同じような定義はつくれないかと思いました。そこをあえて弧長パラメータづけられた曲線で定義しているのはなぜでしょうか。微小区間のとり方はパラメータのとり方に依存すると思うのでパラメータを指定することは必要だと思おうのですが、弧長を使って定めると考えやすさ等があるのでしょうか。

A

弧長でない曲線の全曲率の求め方は、たとえば黒板の 11 ページ。微小区間のとり方の違いは「置換積分の公式」。

弧長を使うのは  $\theta' = \kappa$  という式の  $'$  が弧長に関する微分だから。

## 質問と回答

Q

ホイットニーの定理によって、正則曲線の回転数による同値類を考えると、閉曲線の回転数は整数なので、演算を 2 つの閉曲線の始点と終点をつなげる操作とすれば、同値類は  $\mathbb{Z}$  と同型な群を成すと思います。ここで単位元は回転数 0 の曲線になると思うのですが、回転数 0 の閉曲線は 1 点を表すから、常に  $\dot{\gamma}(t) = 0$  となり、正則曲線の集合を考えていたはずが、正則でない閉曲線が含まれてしまうことになると思うのですが、どこがおかしいのでしょうか。

A

「回転数 0 の閉曲線は 1 点を表す」がおかしい。

## 質問

Q

解析的な質問だが、初等関数で積分できる(できない)ことをどのように判定するのか。

A

Liouville による判定法がある。最近はもっと進んだ判定法があるらしい。

幾何学講座 1

おしらせ・コメント

2020/10/22

15 / 1