幾何学概論第一 (MTH.B211)

3: 曲率円・回転数（補足）

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2020/10/22

曲率円（復習）

定義

曲線 $\gamma(t)$ の $t = t_0$ における

$\boldsymbol{n}$: 左向き単位法線

$$\text{曲率半径 } \rho(t_0) := \frac{1}{|\kappa(t_0)|},$$

$$\text{曲率中心 } \sigma(t_0) := \gamma(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}\boldsymbol{n}(t_0)$$

曲率円 C_{t_0} := 点 $\sigma(t_0)$ を中心とする半径 $\rho(t_0)$ の円

問題 3-1

問題

正則な平面曲線の曲率中心の軌跡をその曲線の縮閉線という．サイクロイド

evolute

$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t) \qquad (0 < t < 2\pi)$$

σ $\dot{\sigma} = 0$

の縮閉線を求め，その特異点はどこか調べなさい．

$$\underbrace{\sigma(t) := \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\boldsymbol{n}(t)}$$

$\boldsymbol{n}(t)$: 左向き単位法線ベクトル

問題 3-1

$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t) \qquad (0 < t < 2\pi)$$

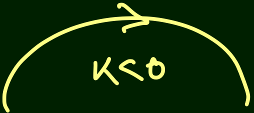
$$\dot\gamma(t) = (1 - \cos t, \sin t) = 2\boxed{\sin\frac{t}{2}}\left(\sin\frac{t}{2}, \cos\frac{t}{2}\right)$$

$\vee$
0

$$\boldsymbol{n}(t) = \left(-\cos\frac{t}{2}, \sin\frac{t}{2}\right)$$

$$\ddot\gamma(t) = \cot\frac{t}{2}\dot\gamma(t) + \sin\frac{t}{2}\left(\cos\frac{t}{2}, -\sin\frac{t}{2}\right),$$

$$\kappa(t) = \frac{\det(\dot\gamma(t), \ddot\gamma(t))}{|\dot\gamma(t)|^3} = \frac{-2\sin^2\frac{t}{2}}{8\sin^3\frac{t}{2}} = -\frac{1}{4}\underline{\operatorname{cosec}}\frac{t}{2} = \frac{-1}{4\sin\frac{t}{2}}$$



$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t) \qquad (0 < t < 2\pi)$$

$$\boldsymbol{n}(t) = \left(-\cos\frac{t}{2}, \sin\frac{t}{2}\right), \qquad \kappa(t) = -\frac{1}{4}\operatorname{cosec}\frac{t}{2}$$

$$\begin{aligned}
\sigma(t) &= \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\boldsymbol{n}(t) \\
&= (t - \sin t, 1 - \cos t) + 4\left(\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}, -\sin^2\frac{t}{2}\right) \\
&= \boxed{\left(t + \sin t, -2\sin^2\frac{t}{2}\right)} = (t + \sin t, -1 + \cos t) \\
&= \boxed{\big((t+\pi) - \sin(t+\pi), 1 - \cos(t+\pi)\big)} - \underline{(\pi, 2)}
\end{aligned}$$

$$\dot{\sigma}(t) = (1 + \cos t, -\sin t) = 2\cos\frac{t}{2}\underline{\left(\cos\frac{t}{2}, -\sin\frac{t}{2}\right)}$$

$\neq 0$

特異点 $t = \pi$

問題 3-1

事実 (テキスト；付録 B-1)

縮閉線は，曲線の法線族の包絡線.

- 法線：
  $N_t := \{\gamma(t) + u\boldsymbol{n}(t)\,;\, u \in \mathbb{R}\} = \{\boldsymbol{x}\,;\, (\gamma(t) - \boldsymbol{x}) \cdot \dot{\gamma}(t) = 0\}$.
- 法線族：曲線の各点における法線を集めてできる直線の 1 パラメータ族 $\{N_t\}$.
- 直線族の包絡線：各点における接線が直線族に含まれる曲線.

事実 (テキスト；付録 B-1)

縮閉線は，平行曲線の特異点の軌跡.

- 平行曲線：$\gamma_\delta(t) := \gamma(t) + \delta\boldsymbol{n}(t)$.

問題 3-1

Q

- 3-1 の問題で（中略）元のサイクロイドある点における法線が縮閉線の対応する点での接線と等しくなったのですが，これはサイクロイドの場合だけなのか，あるいは一般の正則な平面曲線でも成立するのでしょうか．
- 曲線から縮閉線が求まることはわかったが逆の計算は可能か． / 任意の曲線について，その縮閉線がその曲線になっているような曲線を持ってくることはできますか．
- 曲線 $\sigma(t)$ と正の値をとる C^∞-級関数 $\kappa(t)$ を定めると，曲率関数が $\kappa(t)$，縮閉線が $\sigma(t)$ であるような曲線 $\gamma(t)$ が $\sigma(t)$ の法線ベクトルを用いて曲率中心を表した式をいじって一意的に定まる気がするのですが正しいでしょうか．
- 「縮閉線の伸開線は原曲線」という事実から伸開線の一般式はどう導出できますか？

問題 3-1

$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t) \qquad (0 < t < 2\pi)$$
$$\sigma(t) = \big((t+\pi) - \sin(t+\pi), 1 - \cos(t+\pi)\big) + (\pi, -2)$$

事実 (サイクロイド固有の性質：テキスト；付録 B-1)

- サイクロイドの縮閉線はもとのサイクロイドと合同
- 最速降下線
- サイクロイド振り子の等時性

問題 3-1

Q

- 問題 3-1 について（中略）サイクロイドの縮閉線はまたサイクロイドになると思うのですが，これは正しいでしょうか．
- 3-1 は縮閉線が平行移動したものだったが $\gamma(t)$ そのものとなる例はあるか．
- サイクロイドの縮閉線は平行移動でサイクロイドに重なるようですが，縮閉線がもとの曲線に重なることはよくあることですか？他に例はありますか？
- 平面曲線 $\gamma(t)$ の縮閉線を $\sigma(t)$ としたときに，その曲線 $\sigma(t)$ の縮閉線が $\gamma(t)$ と一致するような $\gamma(t)$ は存在しますか？
- 曲線 γ, σ がある点で 2 次の接触をすれば γ, σ の縮閉線はある点で交わると思うのですが逆は成り立ちますか？

問題 3-2

広義積分

問題

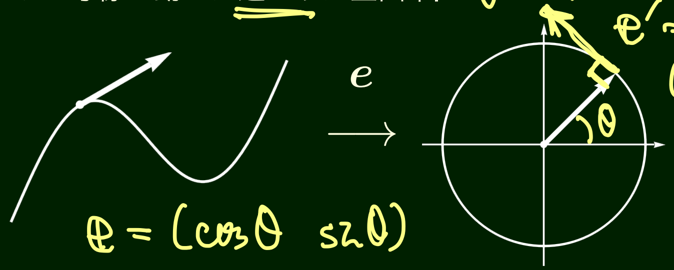
パラメータ表示 $\gamma_1(t) = (t, t^2)$ $(t \in \mathbb{R})$ で与えられる放物線 $\gamma_2(t) = (\operatorname{sech} t, t - \tanh t)$ $(t > 0)$ で与えられる追跡線の「全曲率」を求めなさい.

- 閉曲線ではないので 2π の整数倍になるとは限らない.
- 広義積分.
- ガウス写像の動いた道のりが全曲率.

$\theta' = \kappa$

$e' = \theta'(-\sin\theta, \cos\theta)$

$\theta'' = \kappa$



$e = (\cos\theta, \sin\theta)$

問題 3-2

放物線 parabola $\gamma_1(t) = (t, t^2)$ $(t \in \mathbb{R})$ の全曲率: $y = x^2$

$\dot\gamma_1(t) = (1, 2t)$, $|\dot\gamma_1(t)| = \sqrt{1+4t^2}$, $ds = \sqrt{1+4t^2}\,dt$

$\ddot\gamma_1(t) = (0, 2)$,

$\dfrac{ds}{dt} = |\dot\gamma_1|$

$$\kappa_1(t) = \frac{\det(\dot\gamma_1(t), \ddot\gamma_1(t))}{|\dot\gamma_1(t)|^3} = \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}^3},$$

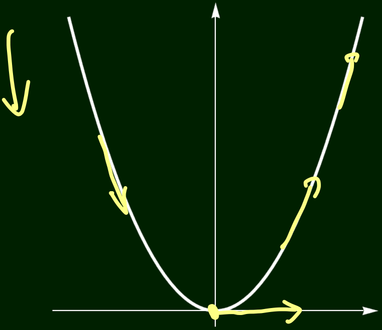
$$T_{\gamma_1} = \int_{-\infty}^{\infty} \kappa_1(t)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\,dt}{1+4t^2}$$

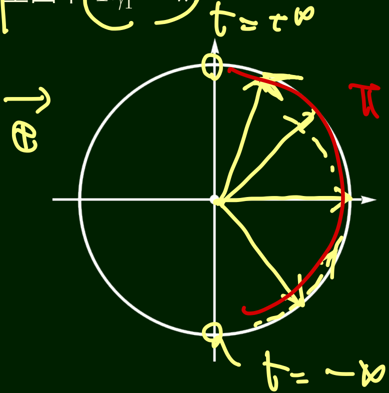
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(2t)}{1+(2t)^2} = [\tan^{-1} 2t]_{-\infty}^{\infty} = \pi$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

問題 3-2

放物線 $\gamma_1(t) = (t, t^2)$ $(t \in \mathbb{R})$ の全曲率 $T_{\gamma_1} = \pi$





問題 3-2

追跡線 tractrix $\gamma_2(t) = (\operatorname{sech} t, t - \tanh t)$ $(t \in (0,\infty))$ の全曲率：

$$\dot\gamma_2(t) = \tanh t(-\operatorname{sech} t, \tanh t), \quad |\dot\gamma_2(t)| = \tanh t, \quad \boxed{ds = \tanh t\, dt}$$

$$= \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$$

t=0: 特異点

$$\ddot\gamma_2(t) = \frac{d}{dt}(\tanh t)(-\operatorname{sech} t, \tanh t) + \tanh t(\tanh t \operatorname{sech} t, \operatorname{sech}^2 t)$$

$$= *(-\operatorname{sech} t, \tanh t) + \tanh t \operatorname{sech} t(\tanh t, \operatorname{sech} t),$$

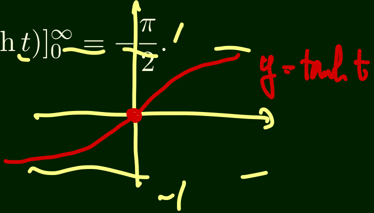
$$\kappa_2(t) = \frac{\det(\dot\gamma_2(t), \ddot\gamma_2(t))}{|\dot\gamma_2(t)|^3} = -\operatorname{cosech} t, \quad = \frac{-1}{\sinh t}$$

$$T_{\gamma_2} = \int_0^\infty \kappa_2(t)\, ds = -\int_0^\infty \underbrace{\operatorname{sech} t}_{\cosh}\, dt = -\int_0^\infty \frac{\cosh t\, dt}{1+\sinh^2 t} \quad 1+\sinh^2 t = \cosh^2 t$$

$$= \underline{-\int_0^\infty \frac{d(\sinh t)}{1+\sinh^2 t}} = -[\tan^{-1}(\sinh t)]_0^\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

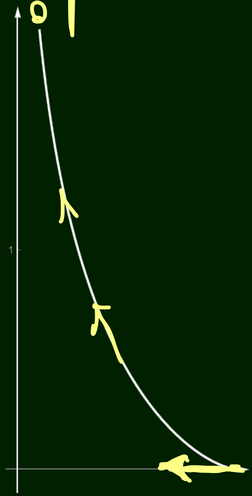
$$= -\tan^{-1}\infty + \tan^{-1} 0$$

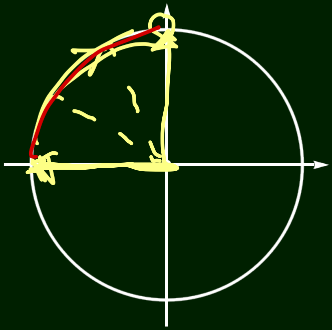
$$= -\frac{\pi}{2}$$



問題 3-2

追跡線 $\gamma_2(t) = (\operatorname{sech} t, t - \tanh t)$ $(t > 0)$ の全曲率 $T_{\gamma_2} = -\frac{\pi}{2}.$





問題 3-2

追跡線（犬跡線） $\gamma_2(t) = (\operatorname{sech} t, t - \tanh t)$

- 点 $(1, 0)$ を通り，点 $\gamma_2(t)$ において y-軸におろした接線の長さが一定 1 であるような点の軌跡.
- 幾何学概論第二（4Q）で再び現れる.

問題 3-2

追跡線（犬跡線） $\gamma_2(t) = (\operatorname{sech} t, t - \tanh t)$

- 点 $(1, 0)$ を通り，点 $\gamma_2(t)$ において y-軸におろした接線の長さが一定 1 であるような点の軌跡.
- 幾何学概論第二（4Q）で再び現れる.