幾何学概論第一 (MTH.B211)

4: フルネ・セレの公式

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2020/10/22

目標

定理 (フルネの公式，テキスト 22 ページ)

$\mathcal{F}(s)$：平面曲線 $\gamma(s)$（s は弧長）のフルネ枠；$\kappa(s)$：曲率とすると

$$\frac{d}{ds}\mathcal{F}(s) = \mathcal{F}(s)\Omega(s) \qquad \Omega(s) := \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) \\ \kappa(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ 平面曲線の基本定理の一意性.

定理 (フルネ・セレの公式，テキスト 55 ページ)

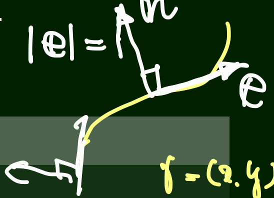
弧長 s をパラメータにもつ空間曲線のフルネ枠は次を満たす：

$$\frac{d}{ds}\mathcal{F}(s) = \mathcal{F}(s)\Omega(s), \qquad \Omega(s) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

平面曲線のフルネ枠

$\gamma\colon \mathbb{R}\supset I \ni s \mapsto \gamma(s)\in\mathbb{R}^2$：平面曲線，　s：弧長．
$\boldsymbol{e}(s)=\gamma'(s)$：進行方向の単位接ベクトル，
$\boldsymbol{n}(s)=$ 左向き単位法線ベクトル．

$|e|=1$



$\gamma=(x,y)$

定義

次の写像を γ のフルネ枠とよぶ．

2×2

$$\mathcal{F}\colon I\ni s\mapsto \mathcal{F}(s)=\bigl(\boldsymbol{e}(s),\boldsymbol{n}(s)\bigr)\in SO(2)$$

Frenet Frame

$$\begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix}$$

⊕　m

det=1

定理 (フルネの公式；テキスト 22 ページ)

n　⊕

$$\frac{d}{ds}\mathcal{F}(s)=\mathcal{F}(s)\Omega(s)\qquad \Omega(s):=\begin{pmatrix}0 & -\kappa(s)\\ \kappa(s) & 0\end{pmatrix}.$$

フルネの公式の証明

(e, n) $\quad \Omega,\ \Omega'$ $\quad (e', n') = (e\ n)\begin{pmatrix}0 & -\kappa\\ \kappa & 0\end{pmatrix}$

結論：$\dfrac{d}{ds}\mathcal{F}(s) = \mathcal{F}(s) := \begin{pmatrix}0 & -\kappa(s)\\ \kappa(s) & 0\end{pmatrix}.$

示すべきこと ①：$\boldsymbol{e}'(s) = \kappa(s)\boldsymbol{n}(s)$[1]; ② $\boldsymbol{n}'(s) = -\kappa(s)\boldsymbol{e}(s)$. $= (\kappa n, -\kappa e)$

証明：

$|e|^2 = e\cdot e = 1 \Rightarrow 2e\cdot e' = 0 \Rightarrow e' \perp e$

(円の接線は半径と直交する)

$e' \overset{\exists}{=} k\, n$ $\quad k = k\det(e, n) = \det(e, kn)$

$k \,\|\, \kappa \Rightarrow$ ① $\quad = \det(\gamma', e') = \det(\gamma', \gamma'') = \kappa$

$n' \perp n \rightarrow (n' = l\, e)$ $\quad n'\cdot e = \underbrace{(n\cdot e)'}_{0} - n\cdot \underbrace{e'}_{\kappa n}$ "部分"

$= -\kappa$ ②

[1] テキストではこれを曲率関数の定義としている

フルネの公式の証明

別証明：$\boldsymbol{e}(s) = \big(\cos\theta(s), \sin\theta(s)\big)$ とおくと

$$\mathcal{F} = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{F}' = \theta' \begin{pmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \underbrace{\theta'}_{\kappa} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lrcorner$

平面曲線の基本定理の一意性

定理

弧長でパラメータづけられた平面曲線 γ, $\tilde{\gamma}$ が共通の曲率を持つ
$\Rightarrow \exists\, A \in \mathrm{SO}(2),\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2 : \tilde{\gamma}(s) = A\gamma(s) + \boldsymbol{a}$.

証明.

γ, $\tilde{\gamma}$ のフルネ枠を $\mathcal{F}$, $\widetilde{\mathcal{F}}$ とおくと

$\mathcal{F} = (e, n)$　$\widetilde{\mathcal{F}} = (\tilde{e}, \tilde{n})$

$e = \gamma'$　$\tilde{e} = \tilde{\gamma}'$

- $A = \widetilde{\mathcal{F}}\mathcal{F}^{-1}$ は一定で $\mathrm{SO}(2)$ の要素である.

$$\frac{d}{ds}\left(\widetilde{\mathcal{F}}\,{}^t\mathcal{F}\right) = \widetilde{\mathcal{F}}'\,{}^t\mathcal{F} + \widetilde{\mathcal{F}}\,{}^t\mathcal{F}'$$

$$= \widetilde{\mathcal{F}}\Omega\,{}^t\mathcal{F} + \widetilde{\mathcal{F}}\,{}^t\Omega\,{}^t\mathcal{F} = \widetilde{\mathcal{F}}(\Omega + {}^t\Omega)\,{}^t\mathcal{F} = 0$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}$$

交代

- $\tilde{\gamma}' = \tilde{e} = Ae = A\gamma'$

$\widetilde{\mathcal{F}} = A\mathcal{F}$

$\tilde{\gamma} = A\gamma + a$

□

例：平行曲線の特異点

γ：正則な平面曲線；$\mathcal{F} = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n})$：フルネ枠；$\kappa$：曲率；$\delta \in \mathbb{R}$,

$$\gamma_\delta(s) := \gamma(s) + \delta \boldsymbol{n}(s) \quad \text{：平行曲線}$$

定理

γ_δ が $s = s_0$ に特異点をもつ $\Leftrightarrow$ $\kappa(s_0)\delta = 1$.

$\gamma'_\delta = 0$ $\neq 0$ $= -\kappa e$ $\neq 0$

$$\gamma'_\delta(s) = \gamma'(s) + \delta \boldsymbol{n}'(s) = \bigl(1 - \delta\kappa(s)\bigr)\boldsymbol{e}(s)$$

系

平行曲線族の特異点の像の軌跡は縮閉線である.

$\gamma + \frac{1}{\kappa} n$

準備：ベクトル積

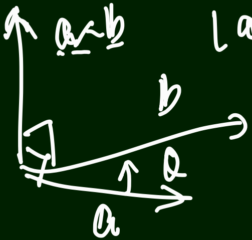
$\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = {}^t(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} := {}^t\left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

補題

- 対応 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \ni (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \mapsto \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ は双線形かつ交代的.

演習 $\underline{\text{A-3}}$



$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin\theta$

ベクトル積

補題

- ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ に対して $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$. とくに $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に直交する.
- $A \in \mathrm{O}(3)$ に対して $(A\boldsymbol{a}) \times (A\boldsymbol{b}) = \pm A(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$. ただし $\pm$ は A の行列式の符号.

ベクトル積

補題

- $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$. とくに $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が一次独立であるための必要十分条件は $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$.
- $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の成す角を θ とすると, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,|\sin\theta|$.

空間曲線のフルネ枠

定義

$\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$：空間曲線； s：弧長（すなわち $|\gamma'(s)| = 1$）

- $\boldsymbol{e}(s) = \gamma'(s)$：単位接ベクトル,
- $\kappa(s) := |\gamma''(s)| \geq 0$：曲率 ． 平面曲線：符号付き

以下 $\kappa(s) \neq 0$ の場合：

$\boxed{\gamma'' = e' \perp e}$

- $\boldsymbol{n}(s) := \gamma''(s)/\kappa(s)$：単位主法線ベクトル
- $\boldsymbol{b}(s) := \boldsymbol{e}(s) \times \boldsymbol{n}(s)$：単位従法線ベクトル,
- $\tau(s) := -\boldsymbol{b}'(s) \cdot \boldsymbol{n}(s)$：捩率.
- $\mathcal{F} := (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})\colon I \to \mathrm{SO}(3)$：フルネ枠

$e \cdot e = 1$

$n \perp e$

習慣

$b = e \times n$

$\det(e, n, b) = |e \times n|^2 > 0$

常螺旋

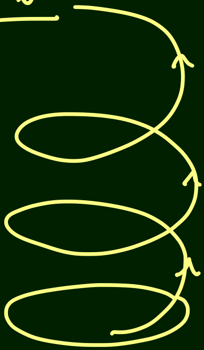
$$\boxed{\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)} \qquad (a \overset{>}{\neq} 0, b \overset{>}{\neq} 0)$$

計算

$$s = \sqrt{a^2+b^2}\, t$$

$$\kappa = \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$\tau = \frac{b}{a^2+b^2} > 0$$



フルネ・セレの公式

定理 (フルネ・セレの公式，テキスト 55 ページ)

$$\frac{d}{ds}\mathcal{F}(s) = \mathcal{F}(s)\Omega(s), \qquad \Omega(s) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

$(\tilde{e}\ \tilde{n}\ \tilde{b})$

フルネ・セレの公式

$$
\begin{aligned}
e' &= \boxed{0}\, e + \boxed{\kappa}\, n + \boxed{0}\, b \\
n' &= \boxed{-\kappa}\, e + \boxed{0}\, n + \boxed{\tau}\, b \\
b' &= \boxed{0}\, e + \boxed{-\tau}\, n + \boxed{0}\, b
\end{aligned}
$$

$e' = \gamma'' = \kappa n$

$b' \cdot n = -\tau$

$$
\begin{aligned}
n' \cdot e &= (n \cdot e)' - n \cdot e' \\
&= -n \cdot (\kappa n) \\
&= -\kappa
\end{aligned}
$$

問題 4-1

問題

弧長 s でパラメータ付けられた空間曲線 $\gamma(s)$ 上の点 $\gamma(s_0)$ と，単位ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ を固定する．このとき，$\boldsymbol{v}$ に直交する平面 $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ への $\gamma(s)$ の正射影 $\sigma(s)$ が s_0 で特異点をもつのはどういうときか．さらに，そのとき $\det\bigl(\sigma''(s_0), \sigma'''(s_0), \boldsymbol{v}\bigr) \neq 0$ となるための γ の曲率・捩率の条件は何か．

$\sigma'(s) = 0$ となるのはいつ？

$\sigma = \gamma - (\gamma \cdot v)v$

$(|v| = 1)$

問題

$\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$：$\mathbb{R}$ 係数の n 次正方行列全体； $[X,Y] := XY - YX$

$\mathrm{Alt}(n,\mathbb{R}) \subset \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$：交代行列全体

交換子

1. X, $Y \in \mathrm{Alt}(n,\mathbb{R}) \Rightarrow [X,Y] \in \mathrm{Alt}(n,\mathbb{R})$.
2. とくに $n=3$ のとき,

   1:1

   $$\iota\colon \mathbb{R}^3 \ni \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \iota(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Alt}(3,\mathbb{R})$$

   とおくと $\iota(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}) = [\iota(\boldsymbol{x}),\iota(\boldsymbol{y})]$.

   $\mathcal{F}' = \mathcal{F}\underline{\Omega}$

3. $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$ に対し
   $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{z} + (\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z})\times\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$.
4. 区間 $I \subset \mathbb{R}$ から $\mathrm{SO}(n)$ への C^∞-級写像 $\mathcal{F}$ に対し $\boxed{\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}'}$ は交代行列.