幾何学概論第一 (MTH.B211)

4: フルネ・セレの公式

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2020/10/22(2020/10/22 **訂正**)

目標

定理 (フルネの公式，テキスト 22 ページ)

$\mathcal{F}(s)$：平面曲線 $\gamma(s)$（s は弧長）のフルネ枠；$\kappa(s)$：曲率とすると

$$\frac{d}{ds}\mathcal{F}(s)=\mathcal{F}(s)\Omega(s)\qquad \Omega(s):=\begin{pmatrix}0 & -\kappa(s)\\ \kappa(s) & 0\end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ 平面曲線の基本定理の一意性．

定理 (フルネ・セレの公式，テキスト 55 ページ)

弧長 s をパラメータにもつ空間曲線のフルネ枠は次を満たす：

$$\frac{d}{ds}\mathcal{F}(s)=\mathcal{F}(s)\Omega(s),\qquad \Omega(s)=\begin{pmatrix}0 & -\kappa(s) & 0\\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s)\\ 0 & \tau(s) & 0\end{pmatrix}.$$

平面曲線のフルネ枠

$\gamma\colon \mathbb{R} \supset I \ni s \mapsto \gamma(s) \in \mathbb{R}^2$：平面曲線，$s$：弧長．
$\boldsymbol{e}(s) = \gamma'(s)$：進行方向の単位接ベクトル，
$\boldsymbol{n}(s) =$ 左向き単位法線ベクトル．

定義

次の写像を γ のフルネ枠とよぶ．

$$\mathcal{F}\colon I \ni s \mapsto \mathcal{F}(s) = \big(\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s)\big) \in \mathrm{SO}(2)$$

定理 (フルネの公式；テキスト 22 ページ)

$$\frac{d}{ds}\mathcal{F}(s) = \mathcal{F}(s)\Omega(s) \qquad \Omega(s) := \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) \\ \kappa(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

フルネの公式の証明

結論： $\dfrac{d}{ds}\mathcal{F}(s) = \mathcal{F}(s)\Omega(s), \qquad \Omega(s) := \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) \\ \kappa(s) & 0 \end{pmatrix}.$

示すべきこと： $\boldsymbol{e}'(s) = \kappa(s)\boldsymbol{n}(s)$ [1]**；** $\boldsymbol{n}'(s) = -\kappa(s)\boldsymbol{e}(s)$**.**

証明：

[1]テキストではこれを曲率関数の定義としている

フルネの公式の証明

別証明： $\boldsymbol{e}(s) = \bigl(\cos\theta(s), \sin\theta(s)\bigr)$ **とおくと**

平面曲線の基本定理の一意性

定理

弧長でパラメータづけられた平面曲線 γ，$\tilde{\gamma}$ が共通の曲率を持つ
$\Rightarrow \exists\, A \in \mathrm{SO}(2),\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ **:** $\tilde{\gamma}(s) = A\gamma(s) + \boldsymbol{a}$.

証明.

$\gamma, \tilde{\gamma}$ **のフルネ枠を** $\mathcal{F}, \widetilde{\mathcal{F}}$ **とおくと**

- $A := \widetilde{\mathcal{F}}\mathcal{F}^{-1}$ **は一定で** $\mathrm{SO}(2)$ **の要素である.**

- $\tilde{\gamma}' = \tilde{\boldsymbol{e}} = A\boldsymbol{e} = A\gamma'$.

□

例：平行曲線の特異点

γ：正則な平面曲線；$\mathcal{F} = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n})$：フルネ枠；$\kappa$：曲率；$\delta \in \mathbb{R}$，

$$\gamma_\delta(s) := \gamma(s) + \delta \boldsymbol{n}(s) \quad \text{：平行曲線}$$

定理

γ_δ が $s = s_0$ に特異点をもつ $\Leftrightarrow \kappa(s_0)\delta = 1$．

$$\gamma_\delta'(s) = \gamma'(s) + \delta \boldsymbol{n}'(s) = \big(1 - \delta\kappa(s)\big)\boldsymbol{e}(s)$$

系

平行曲線族の特異点の像の軌跡は縮閉線である．

準備：ベクトル積

$\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = {}^t(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ **に対して**

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} := {}^t \left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

補題

- **対応** $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \ni (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \mapsto \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ **は双線形かつ交代的．**

ベクトル積

補題

- ベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ に対して $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$.
  とくに $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に直交する．
- $A \in \mathrm{O}(3)$ に対して $(A\boldsymbol{a}) \times (A\boldsymbol{b}) = \pm A(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$．ただし $\pm$ は A の行列式の符号．

ベクトル積

補題

- $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2$．とくに $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ が一次独立であるための必要十分条件は $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$．
- $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の成す角を θ とすると，$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,|\sin\theta|$．

空間曲線のフルネ枠

定義

$\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$：空間曲線； s：弧長（すなわち $|\gamma'(s)| = 1$）

- $\boldsymbol{e}(s) = \gamma'(s)$：単位接ベクトル，
- $\kappa(s) := |\gamma''(s)| \geq 0$：曲率

以下 $\kappa(s) \neq 0$ の場合：

- $\boldsymbol{n}(s) := \gamma''(s)/\kappa(s)$：単位主法線ベクトル
- $\boldsymbol{b}(s) := \boldsymbol{e}(s) \times \boldsymbol{n}(s)$：単位従法線ベクトル，
- $\tau(s) := -\boldsymbol{b}'(s) \cdot \boldsymbol{n}(s)$：捩率．
- $\mathcal{F} := \bigl(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}\bigr)\colon I \to \mathrm{SO}(3)$：フルネ枠

常螺旋

$$\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt) \qquad (a \neq 0, b \neq 0)$$

計算

フルネ・セレの公式

定理 (フルネ・セレの公式，テキスト 55 ページ)

$$\frac{d}{ds}\mathcal{F}(s) = \mathcal{F}(s)\Omega(s), \qquad \Omega(s) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

フルネ・セレの公式

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}' &= \boxed{\quad\quad}\ \boldsymbol{e} + \boxed{\quad\quad}\ \boldsymbol{n} + \boxed{\quad\quad}\ \boldsymbol{b} \\
\boldsymbol{n}' &= \boxed{\quad\quad}\ \boldsymbol{e} + \boxed{\quad\quad}\ \boldsymbol{n} + \boxed{\quad\quad}\ \boldsymbol{b} \\
\boldsymbol{b}' &= \boxed{\quad\quad}\ \boldsymbol{e} + \boxed{\quad\quad}\ \boldsymbol{n} + \boxed{\quad\quad}\ \boldsymbol{b}
\end{aligned}$$

問題 4-1

問題

弧長 s でパラメータ付けられた空間曲線 $\gamma(s)$ 上の点 $\gamma(s_0)$ と，単位ベクトル $v \in \mathbb{R}^3$ を固定する．このとき，v に直交する平面 Π_v への $\gamma(s)$ の正射影 $\sigma(s)$ が s_0 で特異点をもつのはどういうときか．さらに，そのとき $\det\bigl(\sigma''(s_0), \sigma'''(s_0), v\bigr) \neq 0$ となるための γ の曲率・捩率の条件は何か．

問題 4-2

問題

$\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$：$\mathbb{R}$ 係数の n 次正方行列全体； $[X,Y] := XY - YX$
$\mathrm{Alt}(n,\mathbb{R}) \subset \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$：交代行列全体

1. X, $Y \in \mathrm{Alt}(n,\mathbb{R}) \Rightarrow [X,Y] \in \mathrm{Alt}(n,\mathbb{R})$．
2. とくに $n=3$ のとき，

$$\iota\colon \mathbb{R}^3 \ni \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \iota(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Alt}(3,\mathbb{R})$$

   とおくと $\iota(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}) = [\iota(\boldsymbol{x}),\iota(\boldsymbol{y})]$.
3. $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$ に対し
   $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{z} + (\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z})\times\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$．
4. 区間 $I \subset \mathbb{R}$ から $\mathrm{SO}(n)$ への C^∞-級写像 $\mathcal{F}$ に対し $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}'$ は交代行列．