2020 年 10 月 22 日 (2020 年 10 月 29 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一（MTH.B211）講義資料 4

■お知らせ　次回 10 月 29 日に定期試験の予告をいたします．；授業スケジュールを改訂．第 5 回と第 6 回の内容を入れ替えます．

■前回までの訂正

- 第 3 回映写資料 A，9 ページの Q；講義資料 3,2 ページ，質問 5：$\frac{ds}{ds} < 0 \Rightarrow \frac{ds}{dt} < 0$.
- 第 3 回映写資料 B，7 ページ，A の最初：$a = 0, 1$ 以外 $\Rightarrow a = 0, \frac{1}{2}, 1$ 以外
- 第 3 回映写資料 B，11 ページ，下から 2 行目：$\dot\gamma(t_0) = 0 \Rightarrow \dot\gamma(t_0) = \mathbf{0}$ （太字）
- 第 3 回映写資料 B，12 ページ，下から 2 行目；13 ページ下から 2 行目：$\frac{d\tilde\gamma}{du}(u_0) \neq \mathbf{0} \Rightarrow \frac{d\tilde\gamma}{du}(u_0) = \mathbf{0}$.
- 第 3 回映写資料 B，12 ページ，下から 2 行目：$\det\left(\frac{d^2\tilde\gamma}{du^2}(u_0), \frac{d^3\tilde\gamma}{du^3}(u_0)\right) \neq 0$（$\neq 0$ を追加）
- 第 3 回映写資料 B，13 ページ，命題の 1 行目：ののとき ⇒ のとき
- 第 3 回映写資料 C，3 ページ，左向き単位法線ベクトルの定義式の右辺：$\boldsymbol{n}(t) \Rightarrow \boldsymbol{e}(t)$
- 第 3 回映写資料 C，5 ページ：$C(t_0) \Rightarrow \sigma(t_0)$ （2 箇所，講義資料と記号を合わせた）
- 第 3 回映写資料 C，10 ページ，1 行目：$\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ (C^∞-級)（追加）
- 第 3 回講義資料，3 ページ，注意 3.4 の 2 行目：
  $c(u) := \gamma(t_0) + \frac{1}{k}((\cos ku)\boldsymbol{n}(t_0) + (\sin ku)\boldsymbol{e}(t_0)) \Rightarrow c(u) := \sigma(t_0) + \frac{1}{k}(-(\cos ku)\boldsymbol{n}(t_0) + (\sin ku)\boldsymbol{e}(t_0)$
- 第 3 回講義資料，3 ページ，下から 8 行目：C^∞-関数 ⇒ C^∞-級関数
- 第 3 回講義資料，3 ページ，下から 2 行目：$\sigma(u)$ がが ⇒ $\sigma(u)$ が

■授業に関する御意見

- 毎回の授業ごとに全員の質問や感想を読むだけでなく，それをテキスト化して講義資料に回答つきでまとめるということをしているのはすごいと思います．他の学生がどのような疑問を抱いているのかわかってとても助かります．　**山田のコメント：** お役にたてれば幸いです．
- 資料の問題をみていて，パラメータのとり方で混乱してしまうことがあったのですが，これは慣れも必要なのですかね．．．．個人的には動機がよくわからないと内容も飲み込みにくいです．．．．　**山田のコメント：** 動機をわかろうとすることも大事では？
- 前回，問 2-2 を解答した際，「題意が示された」と記述しましたが，問題文に「〜ことを示しなさい」とあったので，その「〜こと」を示す指示語のように今までこの言葉を使っていました．教えてくださりありがとうございます．　**山田のコメント：** なるほど「こと」を指すという解釈があるのですね．
- 教科書 p84 の 4 行目に “曲面 $p = (\cos u, \sin u, v)$ は $\mathbb{R}^3$ における xy 平面の助変数表示を与える” とありますが，半径 1 の円柱面の間違いではないでしょうか．（電子書籍は版が 1 つ古いようなので既に直っていたらすみません）　**山田のコメント：** ありがとうございます．そのとおり．
- たくさんの具体例を授業で取り上げているので，もしかして実際の研究では具体例を知っていることがとても重要なのではないかと思った．　**山田のコメント：** そうかもしれません．
- 曲率を「方向の変化率」と覚えると，回転数の図形的意味が理解しやすかったです．　**山田のコメント：** ですよね．
- 前回課題の楕円積分の問題の解法は見ていて「東工大がいつか受験で出しそうだなあ．．．」なんて思っていました．　**山田のコメント：** ノーコメント．
- 授業に限らずあらゆる場面でムンクさん（叫びちゃん）がいるのが気になります．（嫌という意味ではありません）もしかしてどうでしょうファンですか？　**山田のコメント：** いいえ．
- 後ろの方，叫びちゃんというのですね．　**山田のコメント：** そう呼んでいるだけ．商品名は「ムンクさん」．
- 日本数学会賞秋季賞の受賞，おめでとうございます！！　**山田のコメント：** ありがとうございます ♡

■質問と回答

質問 1：　(3.1) の式で与えられる $\boldsymbol{e}(t)$ と $\boldsymbol{n}(t)$ ですが，$\boldsymbol{e}(t)$ と $\boldsymbol{n}(t)$ はどちらも 2×1 の行列という認識でよろしいのでしょうか．$\boldsymbol{e}(t)$ は $\dot\gamma(t)$ のスカラー倍で定義されているので，$\boldsymbol{e}(t)$ が 2×1 の行列の場合 $\dot\gamma(t)$ も 2×1 の行列ということになりますが，その認識で正しいでしょうか．　**お答え：**列ベクトルとみなしています（「認識」という偉そうな言葉でなく）．行列をかけたり，行列式をとる際は列ベクトルとみなすが，時々手を抜いて横に書いたりする（と最初の講義で説明したような気がします）．

質問 2：　ある閉曲線の回転数とは「その閉曲線上を 1 周するとき，正味何回転するか」という問いに対する答えである，という認識をして大丈夫ですか？　**お答え：**認識するのは自由ですから，認識して大丈夫かどうかはわかりませんが，事実としては不適切．「正味何回転」の主語がありません．「ガウス写像が円周上を何回転」は正しいと思います．

質問 3：　1 次の接触と 2 次以上の接触が同じような定義でないのは何故ですか．点を共有していて回転と平行移動を施して $f'(0) = g'(0) = 0$ では 1 次の接触の定義になりませんか．　**お答え：**はい，それでも定義になります．本当はパラメータや位置によらない定義をしたいが 2 次以上では結構面倒くさいのでグラフ表示にした．1 次のときは簡単に定義できるのでこの形にした．

質問 4：　教科書 p 15 の欄外（山田注：脚注のこと？）に「ハンドルを止めると」とありますが，これはどのような状況をあらわすのですか車のハンドルを切るという意味ですか？　**お答え：**自動車のハンドルをある一定の位置で固定するということ．

質問 5：　今回の授業で「正則にパラメータ付けられた平面曲線」について考えている時と「弧長でパラメータづけられた曲線」を考えているときがありましたが，どのようなことに対して前者（後者）を考えているのかがよく掴めませんでした．例えば閉曲線の全曲率の定義では後者で考えていましたが，曲率自体は別のパラメータで考えることもできるし，弧長パラメータを用いなくても同じような定義はつくれるのではないかと思いました．そこをあえて弧長パラメータづけられた曲線で定義しているのはなぜでしょうか．微小区間のとり方はパラメータのとり方に依存すると思うのでパラメータを指定することは必要だと思いうのですが，弧長を使って定めると考えやすこと等があるのでしょうか．　**お答え：**掴めないもなにも，明言していると思いますが．弧長でない曲線の全曲率の求め方は，たとえば黒板の 11 ページで説明した．微小区間のとり方の違いは「置換積分の公式」です（と説明した）．弧長を使うと考えやすいのは $\theta' = \kappa$ という式の $'$ が弧長に関する微分であるという理由から（と説明したはず）．

質問 6：　全曲率は弧長で積分するのは，正則曲線の何を調整していることになるのか．　**お答え：**$\theta' = \kappa$ の $'$ が弧長に関する微分．

質問 7：　回転数は，曲線がある点の周りを反時計周りに回れば正に，時計周りに回れば負になると読んだのですが，なぜそうなるのですか？　**お答え：**ステートメントをちゃんと書いてみないといけませんね．「$\theta' = \kappa$」がヒント．

質問 8： 「$\kappa(t_0)=0$ のときは γ の接線を曲率円とよぶ」とありますが，このとき曲率中心は定義できますか？ **お答え：**いいえ．

質問 9： （図略：角のあるループ）のような図形が今授業で扱っている体系では閉曲線にならない，ということは分かりましたが，やはり視覚的には閉じているように見えます．これを「閉じている」として扱う体系は幾何学にあるのでしょうか．

お答え： たとえば基本群とか測地ループなどという言葉で探してみましょう．

質問 10： 正則でないパラメータ付けをされた曲線（言い方が難しいですが $\exists t_0$ s.t. $\dot\gamma(t_0)=0$ なる曲線 γ ということです）では，t_0 で曲率を定義できないと認識しています．その点で図形がとがっていると思うのですが，そのとがり具合を表す数学的な量は何かありますか？ **お答え：**前回挙げた「カスプ」には「カスプ的曲率」が定義できる．前回紹介した梅原-佐治-山田の本参照．

質問 11： 3-1 の問題で，サイクロイドの縮閉線がサイクロイドのと式が似ていたので図式化し てみました（山田注：図は省略．図式ではなく図ではないかと思いました）．すると同じ大きサの（原文ママ）サイクロイドの一部ができました．このとき，元のサイクロイドある点における法線が縮閉線の対応する点での接線と等しくなったのですが，これはサイクロイドの場合だけなのか，あるいは一般の正則な平面曲線でも成立するのでしょうか．

お答え： 一般に成り立ちます．$\boldsymbol{n}'=-\kappa\boldsymbol{e}$（フルネの公式，今回やる）を使うと縮閉線の接線は $\boldsymbol{n}$ と平行であることが分かります．

質問 12： 問題 3-1 について（中略）サイクロイドの縮閉線はまたサイクロイドになると思うのですが，これは正しいでしょうか．

お答え： 正しいです．

質問 13： 3-1 は縮閉線が平行移動したものだったが $\gamma(t)$ そのものとなる例はあるか． **お答え：**$\gamma(t)=\gamma(t)+\frac{1}{\kappa(t)}\boldsymbol{n}(t)$ という例？

質問 14： サイクロイドの縮閉線は平行移動でサイクロイドに重なるようですが，縮閉線がもとの曲線に重なることはよくあることですか？他に例はありますか？ **お答え：**重なる，というのは「合同」のこと？

質問 15： 平面曲線 $\gamma(t)$ の縮閉線を $\sigma(t)$ としたときに，その曲線 $\sigma(t)$ の縮閉線が $\gamma(t)$ と一致するような $\gamma(t)$ は存在しますか？

お答え： 2 回縮閉線をとる，という操作をするということ？ $\sigma(t)$ の曲率と単位法線を計算して，実際に書いてみればよいのでは？

質問 16： 曲線 $\sigma(t)$ と正の値をとる C^∞-級関数 $\kappa(t)$ を定めると，曲率関数が $\kappa(t)$，縮閉線が $\sigma(t)$ あるような曲線 $\gamma(t)$ が $\sigma(t)$ の法線ベクトルを用いて曲率中心を表した式をいじって一意的に定まる気がするのですが正しいでしょうか．

お答え： 正しくない．実際 $\kappa(t)$ は一意には定まらない．

質問 17： 曲線から縮閉線が求まることはわかったが逆の計算は可能か． / 任意の曲線について，その縮閉線がその曲線になっているような曲線を持ってくることはできますか．

お答え： 与えられた曲線を縮閉線にもつ曲線を，もとの曲線の**伸開線**という．伸開線は一意には定まらない（テキスト，付録 B-1）．

質問 18： 「縮閉線の伸開線は原曲線」という事実から伸開線の一般式はどう導出できますか？（略：伸開線の微分方程式を立ててとこうとしている） **お答え：**伸開線は一意でないので，最初の主張がおかしい．テキスト，付録 B-2 を見よ．

質問 19： 曲線 γ,σ がある点で 2 次の接触をすれば γ，σ の縮閉線はある点で交わると思うのですが逆は成り立ちますか？

お答え： 伸開線が一意でないので，一般に成り立たない．二つの伸開線が考えている点で交わるならば正しい．

質問 20： 問 3-2 では閉曲線になっていないように思うのですが，閉曲線でなくても全曲率を定義するのでしょうか．

質問 21： (t,t^2) $(t\in\mathbb{R})$ は周期関数でないように思えます．周期を持たない曲線に対し，周期を ∞ とみなし，閉曲線の性質を（むりやり）当てはめることはできますか？またそのとき成り立たなくなる性質はありますか？

お答え： だから「全曲率」と括弧付きで書いている．講義の際に説明したはず．

質問 22： 周期 a（$\in\mathbb{R}$）が存在しない曲線は周期 ∞ と考えて全曲率を $T_\gamma=\int_0^\infty\kappa(s)\,ds$ と定義することによって全曲率の概念を拡張することで，普通の全曲率についての性質が成り立たなくなることはありますか． **お答え：**2π の整数倍にならない．

質問 23： 問 3-2 のような閉曲線でない曲線の全曲率はどのような意味があるのでしょうか． **お答え：**良く考えよ．ヒント：$\theta'=\kappa$．

質問 24： $(\boldsymbol{e}(t_0),\boldsymbol{n}(t_0))\in\mathrm{SO}(2)$ なのは列ベクトルが正規直交基底をなすからですよね？

お答え： それでは $\mathrm{O}(2)$ までしか言えない．「正の向き」であることが必要

質問 25： m 次接触について，二つの曲線が重なっているとき，何次接触といいますか． **お答え：**任意の m で m 次の接触をする．

質問 26： 曲率円と曲率中心のことで，ある点における曲率円は元の曲線の近似ということですか． **お答え：**はい，そう説明したはず．

質問 27： 曲線を m 次近似 $(m\geqq 3)$ できる円や直線のような図形はありますか．円は 2 次近似まで，直線は 1 次近似まででしたが．

お答え： たとえば二次曲線だとどうなります？

質問 28： 2 つの正則にパラメータづけられた曲線 γ,σ が一致するかを調べるときに「σ, γ に適当な移動を施して原点 $(0,0)$ に共有点を作り，それを注意 3.7, 定義 3.8 のようにして原点近傍で $y=f(x)$, $y=g(x)$ と表し，$f^{(m)}(0)=g^{(m)}(0)$ $(m=0,1,2,\dots)$ が成立するか調べる」という操作をすれば γ と σ が（少なくとも局所的には）一致していることが確かめられると考えたのですが，この議論は妥当ですか．

お答え： 妥当でない．実際 $h^{(m)}(0)=0$ $(m=0,1,2,\dots)$ かつ $h(x)\neq 0$ $(x\neq 0)$ となるような C^∞-級関数 h が存在する．

質問 29： ホイットニーの定理によって，正則曲線の回転数による同値類を考えると，閉曲線の回転数は整数なので，演算を 2 つの閉曲線の始点と終点をつなげる操作とすれば，同値類は $\mathbb{Z}$ と同型な群を成すと思います．ここで単位原は回転数 0 の曲線になると思うのですが，回転数 0 の閉曲線は 1 点を表すから，常に $\dot\gamma(t)=0$ となり，正則曲線の集合を考えていたはずが，正則でない閉曲線が含まれてしまうことになると思うのですが，どこがおかしいのでしょうか．

お答え： 「回転数 0 の閉曲線は 1 点を表す」がおかしい．映写資料 B，11 ページ．

質問 30： 解析的な質問だが，初等関数で積分できる（できない）ことをどのように判定するのか．

お答え： Liouville による判定法がある．最近はもっと進んだ判定法があるらしい．

質問 31： 等長変換，合同変換で写像を構成しましたが，同じように閉曲線の「連続変形」では何か写像を考えないのでしょうか．写像を構成すれば回転数が不変であることなどを式で表現できると思いました．

お答え： 「写像を構成する」という言葉の使われ方がおかしい気がしますのでご質問の意味が読み取れません．

4 フルネ・セレの公式

4.1 平面曲線に関するフルネの公式

弧長によりパラメータ付けられた曲線 $\gamma(s)$ の進行方向の単位接ベクトルを $\boldsymbol{e}(s) := \gamma'(s)$（$' = d/ds$），進行方向に対して左向きの単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}(s)$ と書いておく．これらを列ベクトルとみなして並べてできる 2×2-行列値関数 $\mathcal{F}(s) := \bigl(\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s)\bigr)$ を γ の**フルネ枠**[*1]という．各 s に対して $\{\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s)\}$ は正の向きの正規直交系をなすので $\mathcal{F}(s) \in \mathrm{SO}(2)$ が成り立つ．

定理 4.1 (フルネの公式，テキスト 22 ページ)**.** 弧長によりパラメータ付けられた曲線 $\gamma(s)$ のフルネ枠を $\mathcal{F}(s)$，曲率関数を $\kappa(s)$ とすると，次が成り立つ：

$$\frac{d}{ds}\mathcal{F}(s) = \mathcal{F}(s)\Omega(s) \qquad \Omega(s) := \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) \\ \kappa(s) & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

証明. まず $\boldsymbol{e}(s)\cdot\boldsymbol{e}(s) = 1$ の両辺を s で微分すれば $\boldsymbol{e}'(s)\cdot\boldsymbol{e}(s) = 0$．したがって $\boldsymbol{e}'(s)$ は $\boldsymbol{n}(s)$ に平行，つまり $e'(s) = k(s)\boldsymbol{n}(s)$ なる関数 k が存在する．ここで $\kappa = \det(\gamma', \gamma'') = \det(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}') = \det(\boldsymbol{e}, k\boldsymbol{n}) = k$．したがって $\boldsymbol{e}' = \kappa\boldsymbol{n}$ を得る．同様に $\boldsymbol{n}'$ は $\boldsymbol{e}$ に平行で $\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e})' - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}' = -\boldsymbol{n}\cdot(\kappa\boldsymbol{n}) = -\kappa$．したがって $\boldsymbol{n}' = -\kappa\boldsymbol{e}$．これより (4.1) を得る． □

定理 4.2 (平面曲線の基本定理（一意性）)**.** 弧長によりパラメータ付けられた 2 つの曲線 $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$, $\tilde{\gamma}\colon I \to \mathbb{R}^2$ が共通の曲率関数を持つならば，次を満たす $A \in \mathrm{SO}(2)$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ が存在する：

$$\tilde{\gamma}(s) = A\gamma(s) + \boldsymbol{a}.$$

証明. 曲線 γ, $\tilde{\gamma}$ のフルネ枠をそれぞれ $\mathcal{F}$, $\widetilde{\mathcal{F}}$ と書くと，定理 4.1 より $\mathcal{F}' = \mathcal{F}\Omega$, $\widetilde{\mathcal{F}}' = \widetilde{\mathcal{F}}\Omega$ が成り立つ．ただし Ω は γ, $\tilde{\gamma}$ の共通の曲率関数 κ から (4.1) で定まる行列値関数である．フルネ枠は $\mathrm{SO}(2)$ に値をとるから $\left(\widetilde{\mathcal{F}}\mathcal{F}^{-1}\right)' = \left(\widetilde{\mathcal{F}}{}^t\mathcal{F}\right)' = \widetilde{\mathcal{F}}'{}^t\mathcal{F} + \widetilde{\mathcal{F}}{}^t\mathcal{F}' = \widetilde{\mathcal{F}}(\Omega + {}^t\Omega)\mathcal{F} = O$．したがって $\widetilde{\mathcal{F}}\mathcal{F}^{-1}$ は定数行列なので，これを A とおくと $A \in \mathrm{SO}(2)$ で $\widetilde{\mathcal{F}} = A\mathcal{F}$, したがって $\tilde{\gamma}' = \tilde{\boldsymbol{e}} = A\boldsymbol{e} = A\gamma' = (A\gamma)'$ なので $\tilde{\gamma} - A\gamma$ は一定． □

4.2 空間曲線

■ベクトル積 ベクトル $\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = {}^t(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ の**ベクトル積（外積）**$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ を次で定める：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} := {}^t\left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right).$$

補題 4.3. ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ に対して

- 対応 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \ni (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \mapsto \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ は双線形かつ交代的．
- ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ に対して $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$．とくに $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に直交する．
- $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$．とくに $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が一次独立であるための必要十分条件は $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$．
- $A \in \mathrm{O}(3)$ に対して $(A\boldsymbol{a})\times(A\boldsymbol{b}) = \pm A(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$．ただし $\pm$ は A の行列式の符号．

2020 年 10 月 22 日 (2020 年 10 月 29 日訂正)

[*1] フルネ枠：the Frenet frame.

■空間曲線のフルネ枠　平面曲線と同様に，正則にパラメータ付けられた空間曲線 $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ の弧長 $s = s(t) := \displaystyle\int_{t_0}^{t} |\dot\gamma(u)|\,du$ により，γ のパラメータを弧長パラメータに変更することができる．

定義 4.4. 弧長 s によりパラメータ付けられた空間曲線 $\gamma(s)$ に対して $\boldsymbol{e}(s) = \gamma'(s)$ を γ の（進行方向の）**単位接ベクトル**，$\kappa(s) := |\gamma''(s)| \geqq 0$ を γ の**曲率**という[*2]．以下 $\kappa(s) \neq 0$ の場合のみを考える．

- $\boldsymbol{n}(s) := \gamma''(s)/\kappa(s)$ を**単位主法線ベクトル**という．
- $\boldsymbol{b}(s) := \boldsymbol{e}(s) \times \boldsymbol{n}(s)$ を**単位従法線ベクトル**，$\tau(s) := -\boldsymbol{b}'(s)\cdot\boldsymbol{n}(s)$ を**捩率**という．

このとき $\mathcal{F}(s) := \bigl(\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)\bigr)$ は SO(3) に値をとる C^∞-級写像である．これを γ の**フルネ枠**という．

例 4.5. 零でない定数 a, b に対して $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ で与えられる曲線を**つるまき線**，**常螺旋**，**常螺線**という[*3]．この曲線は $t = s/\sqrt{a^2+b^2}$ により弧長パラメータに変換できるので，曲率・捩率は定義から計算できて，$\kappa = |a|/(a^2+b^2)$，$\tau = b/(a^2+b^2)$ となる．

定理 4.6 (フルネ・セレの公式，テキスト 55 ページ)**.** 定義 4.4 の記号の下，次が成り立つ：

$$\frac{d}{ds}\mathcal{F}(s) = \mathcal{F}(s)\Omega(s), \qquad \Omega(s) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

証明. 定義より $\boldsymbol{e}' = \kappa\boldsymbol{n}$．また，捩率の定義から $\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{n} = -\tau$，$|\boldsymbol{b}| = 1$ より $\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{b} = 0$, $\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e})' - \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}' = -\boldsymbol{b}\cdot(\kappa\boldsymbol{n}) = 0$. 以上より $\boldsymbol{b} = -\tau\boldsymbol{n}$．同様に $\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{e} = -\kappa$，$\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{n} = 0$，$\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{b} = \tau$ より $\boldsymbol{n}' = -\kappa\boldsymbol{e} + \tau\boldsymbol{b}$．　□

問題

4-1 弧長 s でパラメータ付けられた空間曲線 $\gamma(s)$ 上の点 $\gamma(s_0)$ と，単位ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ を固定する．このとき，$\boldsymbol{v}$ に直交する平面 $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ への $\gamma(s)$ の正射影 $\sigma(s)$ が s_0 で特異点をもつのはどういうときか．さらに，そのとき $\det\bigl(\sigma''(s_0), \sigma'''(s_0), \boldsymbol{v}\bigr) \neq 0$ となるための γ の曲率・捩率の条件は何か．

4-2 実数を成分とする n 次正方行列全体がなす線型空間を $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$)，X, $Y \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ に対して $[X,Y] := XY - YX$ と定める．交代行列全体からなる $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ の線型部分空間を $\mathrm{Alt}(n,\mathbb{R})$ と書くとき，

(1) X, $Y \in \mathrm{Alt}(n,\mathbb{R})$ ならば $[X,Y] \in \mathrm{Alt}(n,\mathbb{R})$ であることを示しなさい．

(2) とくに $n = 3$ のとき，次が成り立つことを示しなさい：

$$\iota\colon \mathbb{R}^3 \ni \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \iota(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Alt}(3,\mathbb{R}) \quad \text{とおくと} \quad \iota(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}) = [\iota(\boldsymbol{x}), \iota(\boldsymbol{y})].$$

(3) $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$ に対し $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{z} + (\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z})\times\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ が成り立つことを示しなさい．

(4) 区間 $I \subset \mathbb{R}$ から $\mathrm{SO}(n)$ への C^∞-級写像[*4] $\mathcal{F}$ に対し $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}'$ は交代行列であることを示しなさい．

[*2] 曲率：the curvature；主法線：the principal normal；従法線：the binormal；捩率：the torsion．一般のパラメータに関するこれらの量の公式はテキスト 55 ページ．

[*3] つるまき線，常螺旋，常螺旋：a helix.

[*4] 行列値関数が C^∞-級とは，各成分が C^∞-級関数となることである．