幾何学概論第一 (MTH.B211)

おしらせ・コメント

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2020/10/29(2020/10/29 **訂正**)

お知らせ

- 29 名の方から課題の提出がありました．評点およびマーク済みの答案は t2schola におきます．
- 定期試験予告を行います．
- 授業評価アンケートにご協力をお願いします．
  https://www.ks-fdcenter.net/fmane_titech/Ans?ms=t&id=titech&cd=Z4WsNGRm

定期試験予告（日程）

日時： 2020 年 11 月 12 日（木）3–4 時限
場所： オンライン．詳細は後述．
範囲： 主として 11 月 5 日までの授業で扱った内容．
持込： テキスト・ノート・参考書などは参照可．
禁止事項： 外部との通信（同一室内の他人を含む）は不可．「知恵袋」などへの投稿，SNS での質問は担当教員が誤った解答を教える可能性がある．

- 定期試験を受験することが単位を得るための必要条件．
- 理由があって受験できない方は事前に電子メイルにて連絡．

定期試験予告（内容）

成績評価： x：課題の合計得点；y：試験の得点．報告される点数：$\min\{Z, 100\}$；

$$Z := 5 \times \left[A \times \frac{z}{5}\right] \qquad z := (1-a)(4x) + ay.$$

- $A \in [1, +\infty)$：採点時に決める定数．
- $a \in [0, 1]$：受験者が決める定数@パート B
- 課題の得点を試験前までに確認しておくこと．

試験形式：

パート A： 記述式問題（40 点満点） 解答を pdf で提出．
パート B： 短答式問題（60 点満点） Google Forms を利用．

定期試験予告（手順）

10 月 29 日	10:40	試験予告
10 月 29 日	13:00	試験実施アンケート URL 送付（OCW-i）
11 月 3 日	23:59	試験実施アンケート締切（Google Forms）
11 月 5 日	10:00	パート A 解答用紙 PDF 配布（T2SCHOLA）
11 月 5 日	10:00	オナーコード同意書配布（T2SCHOLA）
11 月10 日	23:59	オナーコード同意書提出（T2SCHOLA）
11 月11 日	10:00	試験問題 PDF 配布（T2SCHOLA）
11 月12 日	10:35	Zoom 開室
11 月12 日	10:45	パート A 問題 PW 配布（チャット） パート A 答案作成（筆記）
	11:30	パート A 答案提出締切（T2SCHOLA）
11 月12 日	11:40	パート B 問題 PW 配布（チャット） パート B 答案作成（Google Forms）
	12:20	パート B 答案提出締切（Google Forms）

- 詳細は本日配布した「試験予告」(exam-forecast.pdf) 参照
- 成績フィードバックの方法は試験問題につけておきます．

授業の感想など

- $\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{R}^3$ でのギロンが主なので何とかなっている．高次元になったときにもスムーズに学習したことを適用できるようにしておきたい．
  山田のコメント： 一般次元でギロンできること，特定の次元でしか成り立たないことを分けて考えよう．
- 関係ない話ですが，水曜どうでしょうにおいてムンクさんが登場したのは 1999 年です．
  山田のコメント： そうだったんですね．テレビのない生活を長くやっているので気づいていませんでした．
- 次の授業は「いい肉の日 (11/29)」ですね（特に深い意味はないです...）
  山田のコメント： 10 月では？
- 授業数も半分を切ってしまいましたが，山田先生は対面授業とオンライン授業はどちらがやり易いと感じていますか？
  山田のコメント： 一長一短．効果は長い目で．

質問と回答

Q
$n \in \mathbb{N}$ とするとき $\mathbb{R}^n$ の曲線についてフルネ枠をとることができるのか．（同様の質問多数）

A
「一般化できるか」というのは，実は容易に思いつく質問ですね．

Q
フルネ・セレの公式を n 次元に拡張することを考えたとき，例えば 4 次元では

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau & 0 \\ 0 & -\tau & 0 & \tau' \\ 0 & 0 & -\tau' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}' \end{pmatrix}$$

なる b', τ' に相当する量を導入することになると思いますが，これらを定義する一般的な方法はありますか？rot は 3 次元でしか定義されないのでその拡張は思いつきませんでした．

高次元フルネ枠

$\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$：曲線．パラメータは弧長（$|\gamma'| = 1$）

- $\boldsymbol{e}_1 := \gamma'$
- $\kappa_1 = |\boldsymbol{e}_1'|$；$\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1'/\kappa_1$．($\boldsymbol{e}_1 \perp \boldsymbol{e}_1'$ より $\boldsymbol{e}_2 \perp \boldsymbol{e}_1$)
- $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2'\}$ にグラム・シュミットの直交化を施し，正規直交系 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ をつくる：
  $\kappa_2 = |\boldsymbol{e}_2' + \kappa_1 \boldsymbol{e}_1|$；$\boldsymbol{e}_3 = (\boldsymbol{e}_2' + \kappa_1 \boldsymbol{e}_1)/\kappa_2$．
- $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3'\}$ にグラム・シュミットの直交化を施し，正規直交系 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ をつくる：
  $\kappa_3 = |\boldsymbol{e}_3' + \kappa_2 \boldsymbol{e}_2|$；$\boldsymbol{e}_4 = (\boldsymbol{e}_3' + \kappa_2 \boldsymbol{e}_2)/\kappa_3$．
- ... 正規直交系 $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_{n-1}\}$ と曲率関数 $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-2}$ が定義され，$\boldsymbol{e}_j' = -\kappa_{j-1}\boldsymbol{e}_{j-1} + \kappa_j \boldsymbol{e}_{j+1}$ $(j = 2, \dots, n-1)$．
- $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_{n-1}, \boldsymbol{e}_n) \in \mathrm{SO}(n)$ となる $\boldsymbol{e}_n$ は唯一つ定まる．
  $\kappa_{n-1} := -\boldsymbol{e}_n' \cdot \boldsymbol{e}_{n-1}$．

κ_j を第 j 曲率という．

質問と回答

Q

γ_δ が特異点をもつ $(s=s_0) \Leftrightarrow \kappa(s_0)\delta = 1$ とありますが，以前，曲率半径が $1/\kappa$ と習ったときのその $1/\kappa$ と関係あるのでしょうか？

A

法線方向に曲率半径だけ行った先では「法線が 1 点に集まる」（正確でないが）ので，平行曲線が特異点をもつ．δ を動かしてそういう点を集めたのが縮閉線．縮閉線が「焦線」caustic ともよばれるのはこういう経緯から．

質問と回答

Q

$\gamma(t)$ の縮閉線 $\sigma(t)$ が $\gamma(t)$ に一致するように計算した．（$|\dot\gamma(t)| = |\dot\sigma(t)| = 1$）その結果，$\boldsymbol{e}_\sigma(t) = (1/\kappa_\gamma(t))'\boldsymbol{n}_\gamma(t)$ となり $\boldsymbol{e}_\sigma(t)$ と $\boldsymbol{n}_\gamma(t)$ が単位ベクトルであることから $(1/\kappa_\gamma(t))' = \pm 1$ であり $\kappa_\gamma(t) = \pm 1/t$ から $\gamma(t)$ を求めると，$\gamma(t) = \frac{t}{2}(\sin(\log t) + \cos(\log t), \sin(\log t) - \cos(\log t))$ or $\frac{t}{2}(\cos(\log t) + \sin(\log t), \cos(\log t) - \sin(\log t))$ となるが，そのどちらも縮閉線が $\sigma(t) \to -\gamma(t) \to -\sigma(t) \to \gamma(t)$ と繰り返しになっていた．これは $\sigma(t)$ の縮閉線が $\gamma(t)$ に一致するような $\gamma(t)$ は存在しないということでしょうか？

A

- これは「対数螺線」（テキスト §4）．
- γ と σ は合同（かつ相似で相似の中心が原点）．
- 「存在しない」というところまでは行っていないのでは？

質問と回答

Q

2 次元（平面曲線）で扱った「m 次接触」の考えは 3 次元（空間曲線）にもありますか．$\gamma(t)$, $\gamma(u)$ に対して m 以下の任意の非負整数 r で $\gamma^{(r)}(t_0) = \tilde\gamma^{(r)}(u_0)$ ならば「m 次接触」とすれば美しくまとまる気がするのですが．ただ，次元が上がっているので，平面曲線における接触の考えが，空間では空間曲面（山田注：曲面のこと？）の考えに対応するような気もします．

Q

3 次元での ’曲率の定義は，たとえば $\mathbb{R}^3$ の曲線で $z=0$ 上にあるものを考えたとき，2 次元の曲率と一致しませんが，3 次元においても $\kappa(s)$ から曲率円や縮閉線に似たものは定義できますか？（空間の曲線に球をあてがうのは無理そうに思います）．

質問と回答

Q

弧長でパラメータづけられた空間曲線 γ, $\tilde\gamma$ について，共通の曲率と捩率を持つならば，平面曲線のときと同様にして回転と平行移動で γ と $\tilde\gamma$ は移りあうことがいえ，曲率と捩率は似ているように感じました．この捩率とは曲線におけるどのような量を表しているのでしょうか．また，以前，曲率はパラメータ変換により不変であることを示しましたが，この捩率もパラメータ変換によって不変なのでしょうか．

Q

- 問題 4-1 について捩率が 0 になる時というのは図形的にはどのような時
- 平面曲線において曲率が正なら左曲がり，曲率が負なら右曲がりであったように，捩率の正負のよって分かる空間曲線の特徴は何かあるでしょうか．

曲率・捩率の意味

命題

弧長でパラメータ付けられた空間曲線 γ の曲率が零点をもたないとき，γ の像が $\mathbb{R}^3$ のある平面に含まれるための必要十分条件は捩率が恒等的に零となることである．

- γ の像が平面 Π に含まれるならば，$\boldsymbol{e} = \gamma'$，$\boldsymbol{n} = \gamma''/|\gamma''|$ はいずれも Π と平行なので $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{n}$ は Π に直交する単位ベクトル．したがって $\boldsymbol{b}$ は一定なので $\tau = -\boldsymbol{b}' \cdot \boldsymbol{n} = 0$．
- $\tau = 0$ のとき，フルネ・セレの公式から $\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{0}$ なので $\boldsymbol{b}$ は定ベクトル．このとき，パラメータの値 s_0 を一つ固定して

  $$f(s) := \bigl(\gamma(s) - \gamma(s_0)\bigr) \cdot \boldsymbol{b} \quad \text{とおくと} \quad f'(s) = \boldsymbol{e}(s) \cdot \boldsymbol{b} = 0.$$

  したがって $f(s) = f(s_0) = 0$ なので $\mathrm{A} = \gamma(s_0)$ とおくと

  $$\gamma(s) \in \Pi := \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}^3 \,;\, \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \boldsymbol{b} = 0\}.$$

曲率・捩率の意味（ブーケの公式）

命題

弧長でパラメータ付けられた空間曲線 γ の曲率が零点をもたないとき，

$$\gamma(s_0+s) - \gamma(s_0) = s\boldsymbol{e}(s_0) + \frac{s^2}{2}\kappa(s_0)\boldsymbol{n}(s_0)$$
$$+ \frac{s^3}{6}\bigl(-\kappa(s_0)^2\boldsymbol{e}(s_0) + \kappa'(s_0)\boldsymbol{n}(s_0) + \kappa(s_0)\tau(s_0)\boldsymbol{b}(s_0)\bigr) + o(s^3).$$

空白ページ