幾何学概論第一 (MTH.B211)

4: フルネ・セレの公式（補足）

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2020/10/29(2020/10/29 **訂正**)

問題 4-1

問題

弧長 s でパラメータ付けられた空間曲線 $\gamma(s)$ 上の点 $\gamma(s_0)$ と，単位ベクトル $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$ を固定する．このとき，$\boldsymbol{v}$ に直交する平面 $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ への $\gamma(s)$ の正射影 $\sigma(s)$ が s_0 で特異点をもつのはどういうときか．さらに，そのとき $\det(\sigma''(s_0),\sigma'''(s_0),\boldsymbol{v})\neq 0$ となるための γ の曲率・捩率の条件は何か．

問題 4-1 (正射影)

$\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$ **：単位ベクトル（$|\boldsymbol{v}|=1$）．**

$\Pi_{\boldsymbol{v}} :=$ (**原点を通り $\boldsymbol{v}$ に直交する平面**) $=\{\mathrm{P}\in\mathbb{R}^3\,;\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\boldsymbol{v}=0\}$

$\Pi_{\boldsymbol{v}}$ **への正射影：**

$$\pi_{\boldsymbol{v}}\colon \mathbb{R}^3\ni\boldsymbol{x}\longmapsto \pi_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}$$

注：$\Pi_{-\boldsymbol{v}}=\Pi_{\boldsymbol{v}};\ \pi_{-\boldsymbol{v}}=\pi_{\boldsymbol{v}}$．

問題 4-1

$\gamma(s)$ **：空間曲線；s は弧長．$\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$：単位ベクトル**

$$\sigma(s):=\pi_{\boldsymbol{v}}\circ\gamma(s)=\gamma(s)-(\gamma(s)\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}$$

問題

$\sigma(s)$ **が s_0 で特異点をもつのはどういうときか．**

$$\sigma'(s_0)=\gamma'(s_0)-\bigl(\gamma'(s_0)\cdot\boldsymbol{v}\bigr)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}(s_0)-\bigl(\boldsymbol{e}(s_0)\cdot\boldsymbol{v}\bigr)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$$
$$\Leftrightarrow\qquad \boldsymbol{v}=\pm\boldsymbol{e}(s_0).$$

問題 4-1

$\gamma(s)$ **：空間曲線；s は弧長．$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}(s_0)\in\mathbb{R}^3$：$s=s_0$ における単位接ベクトル**

$$\sigma(s):=\pi_{\boldsymbol{v}}\circ\gamma(s)=\gamma(s)-(\gamma(s)\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}$$

問題

$\det(\sigma''(s_0),\sigma'''(s_0),\boldsymbol{v})\neq 0$ **となるのはいつか？**

フルネ枠 $(\boldsymbol{e},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b})$，$\kappa$ を曲率，τ を捩率を用いると，フルネ・セレの公式

$$\boldsymbol{e}'=\kappa\boldsymbol{n},\qquad \boldsymbol{n}'=-\kappa\boldsymbol{e}+\tau\boldsymbol{b},\qquad \boldsymbol{b}'=-\tau\boldsymbol{n}$$

の公式から

$$\gamma''=\boldsymbol{e}'=\kappa\boldsymbol{n},$$
$$\gamma'''=(\kappa\boldsymbol{n})'=\kappa'\boldsymbol{n}+\kappa\boldsymbol{n}'=\kappa'\boldsymbol{n}-\kappa^2\boldsymbol{e}+\kappa\tau\boldsymbol{b}$$

問題 4-1

$$\sigma(s):=\pi_{\boldsymbol{v}}\circ\gamma(s)=\gamma(s)-(\gamma(s)\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}\qquad(\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}(s_0))\gamma''\ =\boldsymbol{e}'=\kappa\boldsymbol{n}$$
$$\gamma'''=(\kappa\boldsymbol{n})'=\kappa'\boldsymbol{n}+\kappa\boldsymbol{n}'=\kappa'\boldsymbol{n}-\kappa^2\boldsymbol{e}+\kappa\tau\boldsymbol{b}$$
$$\gamma''(s_0)\cdot\boldsymbol{e}(s_0)=0,$$
$$\gamma'''(s_0)\cdot\boldsymbol{e}(s_0)=-\kappa(s_0)^2$$
$$\sigma''(s_0)=\kappa(s_0)\boldsymbol{n}(s_0),$$
$$\sigma'''(s_0)=\kappa'(s_0)\boldsymbol{n}(s_0)+\kappa(s_0)\tau(s_0)\boldsymbol{b}(s_0)$$
$$\begin{aligned}&\det(\sigma''(s_0),\sigma'''(s_0),\boldsymbol{e}(s_0))\\&\quad=\det(\kappa(s_0)\boldsymbol{n}(s_0),\kappa(s_0)\tau(s_0)\boldsymbol{b}(s_0),\boldsymbol{e}(s_0))\\&\quad=\kappa(s_0)^2\tau(s_0)\end{aligned}$$

問題 4-1

問題

弧長 s でパラメータ付けられた空間曲線 $\gamma(s)$ 上の点 $\gamma(s_0)$ と，単位ベクトル $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$ を固定する．このとき，$\boldsymbol{v}$ に直交する平面 $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ への $\gamma(s)$ の正射影 $\sigma(s)$ が s_0 で特異点をもつのはどういうときか．さらに，そのとき $\det(\sigma''(s_0),\sigma'''(s_0),\boldsymbol{v})\neq 0$ となるための γ の曲率・捩率の条件は何か．

- $\boldsymbol{v}=\pm\boldsymbol{e}(s_0)$．
- $\kappa(s_0)=0$ **のときは** $\det(\dots)$ **は零になる．**
- $\kappa(s_0)\neq 0$ **のとき** $\det(\sigma'',\sigma''',\boldsymbol{v})(s_0)=\kappa(s_0)^2\tau(s_0)$

問題 4-1

- σ **：平面 $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ 上の曲線．**
- $\boldsymbol{v}=(0,0,1)$ **とすれば，** $\sigma(s)=\bigl(x(s),y(s),0\bigr)$．
- $\hat{\sigma}(s):=(x(s),y(s))$ **とする．**

とくに

$$\det(\sigma'',\sigma''',\boldsymbol{v})=\det(\hat{\sigma}'',\hat{\sigma}''').$$

事実 (カスプの判定条件；問題 1-2)

平面曲線 $\hat{\sigma}(s)$ が $s=s_0$ にカスプをもつ

$\Leftrightarrow$ $\hat{\sigma}(s_0)'=\boldsymbol{0}$ **かつ** $\det(\sigma''(s_0),\sigma'''(s_0))\neq 0$．

常螺線の例：

回転数？

Q

- 空間内の閉曲線についても平面上の閉曲線のように「回転数」というのは定義されているのでしょうか．個人的には問題 4-1 のように正射影を考えて，それについての回転数が空間内の閉曲線の「回転数」になるかと思ったのですが，射影をとる平面によって回転数が変わるのではと考えています．
- 一般の m 次直交空間における閉曲線のガウス写像は定義できますか？また，全曲率とどのような関係を持ちますか．

A

- 問題 4-1 のように射影をとると特異点がでることもある．
- ガウス写像は $\gamma'\colon I \to S^{m-1}$（$S^{m-1}$ は $m-1$ 次元球面）として平面曲線と同様に定義できます．全曲率はその像の弧長．

類題

問題

弧長 s でパラメータ付けられた空間曲線 $\gamma(s)$ の曲率 κ は零点をもたず，捩率 τ は κ の m 倍（m は定数）とする．
このとき，大きさ 1 の定ベクトル v で $\gamma'(s)$ と一定の角度を成すものが存在することを示しなさい．

- フルネ枠 $(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ をとる．
- $\boldsymbol{v}(s) = a(s)\boldsymbol{e}(s) + b(s)\boldsymbol{n}(s) + c(s)\boldsymbol{b}(s)$ とおく．
- 大きさの条件：$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = 1$．
- 角度一定の条件：$\boldsymbol{v} \cdot \gamma'$ が一定．
- $\boldsymbol{v}$ が定ベクトルである条件：$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{0}$．

問題 4-2

問題

$\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$：$\mathbb{R}$ 係数の n 次正方行列全体；$[X,Y] := XY - YX$
$\mathrm{Alt}(n,\mathbb{R}) \subset \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$：交代行列全体

1. X, $Y \in \mathrm{Alt}(n,\mathbb{R}) \Rightarrow [X,Y] \in \mathrm{Alt}(n,\mathbb{R})$．
2. とくに $n=3$ のとき，
$$\iota\colon \mathbb{R}^3 \ni \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \iota(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Alt}(3,\mathbb{R})$$
とおくと $\iota(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) = [\iota(\boldsymbol{x}), \iota(\boldsymbol{y})]$.
3. $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$ に対し
$(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{z} + (\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z})\times\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$．
4. 区間 $I \subset \mathbb{R}$ から $\mathrm{SO}(n)$ への C^∞-級写像 $\mathcal{F}$ に対し $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}'$ は交代行列．

問題 4-2

問題

$\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$：$\mathbb{R}$ 係数の n 次正方行列全体；$[X,Y] := XY - YX$
$\mathrm{Alt}(n,\mathbb{R}) \subset \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$：交代行列全体

1. X, $Y \in \mathrm{Alt}(n,\mathbb{R}) \Rightarrow [X,Y] \in \mathrm{Alt}(n,\mathbb{R})$．

- $A \in \mathrm{Alt}(n,\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^tA = -A$．
- ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

注意：
交換子積 $[\ ,\ ]$ は，ベクトル空間 $\mathrm{Alt}(n,\mathbb{R})$ の双線形かつ交代的な積を与える．

問題 4-2

問題

$\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$：$\mathbb{R}$ 係数の n 次正方行列全体；$[X,Y] := XY - YX$
$\mathrm{Alt}(n,\mathbb{R}) \subset \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$：交代行列全体

2. とくに $n=3$ のとき，
$$\iota\colon \mathbb{R}^3 \ni \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \iota(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Alt}(3,\mathbb{R})$$
とおくと $\iota(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) = [\iota(\boldsymbol{x}), \iota(\boldsymbol{y})]$.

そのまま計算すればよいが，
$\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$ とおいて
$$\iota(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2) = \iota(\boldsymbol{e}_3), \qquad [\iota(\boldsymbol{e}_1), \iota(\boldsymbol{e}_2)] = \iota(\boldsymbol{e}_3)$$
などを示せばよい（双線型性，交代性から 3 通りを示せばよい）

問題 4-2

問題

$\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$：$\mathbb{R}$ 係数の n 次正方行列全体；$[X,Y] := XY - YX$
$\mathrm{Alt}(n,\mathbb{R}) \subset \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$：交代行列全体

3. $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{z} + (\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z})\times\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$．

$X := \iota(\boldsymbol{x})$, $Y = \iota(\boldsymbol{y})$, $Z = \iota(\boldsymbol{z})$ とすると
$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = \cdots = O. \qquad (*)$$

- 双線形・交代的な積 $[\ ,\ ]$ で (*) を満たすものが与えられている線型空間をリー環，リー代数という．
- ι はリー代数 $(\mathbb{R}^3, \times)$ から $(\mathrm{Alt}(3), [\ ,\ ])$ の間の同型を与える．

ベクトル三重積の公式（テキスト付録 A-3）を用いてもよい．

問題 4-2

問題

4. 区間 $I \subset \mathbb{R}$ から $\mathrm{SO}(n)$ への C^∞-級写像 $\mathcal{F}$ に対し $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}'$ は交代行列．

- $\mathcal{F}$ は直交行列に値をとるから ${}^t\mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1}$．
- $I = {}^t\mathcal{F}\mathcal{F}$ の両辺を t で微分して
$$O = {}^t\mathcal{F}'\mathcal{F} + {}^t\mathcal{F}\mathcal{F}' = {}^t({}^t\mathcal{F}\mathcal{F}') + {}^t\mathcal{F}\mathcal{F}'.$$

事実

直交群 $\mathrm{SO}(n)$ のリー環は $\mathrm{Alt}(n,\mathbb{R})$．

質問と回答

Q

問題 4-2 (4) の $\mathcal{F}^{-1}$ とは「写像 $\mathcal{F}$ の逆像」ではなく「直交行列の逆行列」という意味でとらえていますが，あっていますか？

A

文脈で考えてみよう．もし「逆像」だったとして，それと $\mathcal{F}$ を「かける」というのはどういう意味でしょう．$\mathcal{F}\colon I \to \mathrm{SO}(n)$ なので，逆像は I の部分集合．