幾何学概論第一 (MTH.B211)

4: フルネ・セレの公式（補足）

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2020/10/29(2020/10/29 **訂正**)

問題 4-1

問題

弧長 s でパラメータ付けられた空間曲線 $\gamma(s)$ 上の点 $\gamma(s_0)$ と，単位ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ を固定する．このとき，$\boldsymbol{v}$ に直交する平面 $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ への $\gamma(s)$ の正射影 $\sigma(s)$ が s_0 で特異点をもつのはどういうときか．さらに，そのとき $\det\bigl(\sigma''(s_0), \sigma'''(s_0), \boldsymbol{v}\bigr) \neq 0$ となるための γ の曲率・捩率の条件は何か．

問題 4-1 (正射影)

$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$：単位ベクトル（$|\boldsymbol{v}| = 1$）．
$\Pi_{\boldsymbol{v}} :=$ (原点を通り $\boldsymbol{v}$ に直交する平面) $= \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}^3 \,;\, \overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \boldsymbol{v} = 0\}$
$\Pi_{\boldsymbol{v}}$ への正射影：

$$\pi_{\boldsymbol{v}} \colon \mathbb{R}^3 \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \pi_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{v}$$

注：$\Pi_{-\boldsymbol{v}} = \Pi_{\boldsymbol{v}}$; $\pi_{-\boldsymbol{v}} = \pi_{\boldsymbol{v}}$．

問題 4-1

$\gamma(s)$：空間曲線；s は弧長．$\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$：単位ベクトル

$$\sigma(s) := \pi_{\boldsymbol{v}}\circ\gamma(s) = \gamma(s) - (\gamma(s)\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}$$

問題

$\sigma(s)$ が s_0 で特異点をもつのはどういうときか．

$$\begin{aligned}\sigma'(s_0) = \gamma'(s_0) - \bigl(\gamma'(s_0)\cdot\boldsymbol{v}\bigr)\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{e}(s_0) - \bigl(\boldsymbol{e}(s_0)\cdot\boldsymbol{v}\bigr)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\\ \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{v} &= \pm\boldsymbol{e}(s_0).\end{aligned}$$

問題 4-1

$\gamma(s)$：空間曲線；s は弧長．$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}(s_0) \in \mathbb{R}^3$：$s = s_0$ における単位接ベクトル

$$\sigma(s) := \pi_{\boldsymbol{v}} \circ \gamma(s) = \gamma(s) - (\gamma(s) \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{v}$$

問題

$\det(\sigma''(s_0), \sigma'''(s_0), \boldsymbol{v}) \neq 0$ となるのはいつか？

フルネ枠 $(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$，$\kappa$ を曲率，τ を捩率を用いると，フルネ・セレの公式

$$\boldsymbol{e}' = \kappa \boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{n}' = -\kappa \boldsymbol{e} + \tau \boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{b}' = -\tau \boldsymbol{n}$$

の公式から

$$\begin{aligned} \gamma'' &= \boldsymbol{e}' = \kappa \boldsymbol{n}, \\ \gamma''' &= (\kappa \boldsymbol{n})' = \kappa' \boldsymbol{n} + \kappa \boldsymbol{n}' = \kappa' \boldsymbol{n} - \kappa^2 \boldsymbol{e} + \kappa\tau \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

問題 4-1

$$\sigma(s) := \pi_{\boldsymbol{v}} \circ \gamma(s) = \gamma(s) - (\gamma(s) \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{v} \qquad (\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}(s_0))\gamma'' \quad = \boldsymbol{e}' = \kappa\boldsymbol{n}$$

$$\gamma''' = (\kappa\boldsymbol{n})' = \kappa'\boldsymbol{n} + \kappa\boldsymbol{n}' = \kappa'\boldsymbol{n} - \kappa^2\boldsymbol{e} + \kappa\tau\boldsymbol{b}$$

$$\gamma''(s_0) \cdot \boldsymbol{e}(s_0) = 0,$$

$$\gamma'''(s_0) \cdot \boldsymbol{e}(s_0) = -\kappa(s_0)^2$$

$$\sigma''(s_0) = \kappa(s_0)\boldsymbol{n}(s_0),$$

$$\sigma'''(s_0) = \kappa'(s_0)\boldsymbol{n}(s_0) + \kappa(s_0)\tau(s_0)\boldsymbol{b}(s_0)$$

$$\begin{aligned}
&\det(\sigma''(s_0), \sigma'''(s_0), \boldsymbol{e}(s_0)) \\
&\qquad = \det(\kappa(s_0)\boldsymbol{n}(s_0), \kappa(s_0)\tau(s_0)\boldsymbol{b}(s_0), \boldsymbol{e}(s_0)) \\
&\qquad = \kappa(s_0)^2\tau(s_0)
\end{aligned}$$

問題 4-1

問題

弧長 s でパラメータ付けられた空間曲線 $\gamma(s)$ 上の点 $\gamma(s_0)$ と，単位ベクトル $v \in \mathbb{R}^3$ を固定する．このとき，v に直交する平面 $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ への $\gamma(s)$ の正射影 $\sigma(s)$ が s_0 で特異点をもつのはどういうときか．さらに，そのとき $\det\bigl(\sigma''(s_0), \sigma'''(s_0), \boldsymbol{v}\bigr) \neq 0$ となるための γ の曲率・捩率の条件は何か．

- $\boldsymbol{v} = \pm\boldsymbol{e}(s_0)$．
- $\kappa(s_0) = 0$ **のときは** $\det(\dots)$ **は零になる．**
- $\kappa(s_0) \neq 0$ **のとき** $\det(\sigma'', \sigma''', \boldsymbol{v})(s_0) = \kappa(s_0)^2\tau(s_0)$

問題 4-1

- σ：平面 $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ 上の曲線．
- $\boldsymbol{v} = (0,0,1)$ とすれば，$\sigma(s) = \big(x(s), y(s), 0\big)$．
- $\hat{\sigma}(s) := (x(s), y(s))$ とする．

とくに

$$\det(\sigma'', \sigma''', \boldsymbol{v}) = \det(\hat{\sigma}'', \hat{\sigma}''').$$

事実 (カスプの判定条件；問題 1-2)

平面曲線 $\hat{\sigma}(s)$ が $s = s_0$ にカスプをもつ

$$\Leftrightarrow \hat{\sigma}(s_0)' = \mathbf{0} \text{ かつ } \det(\sigma''(s_0), \sigma'''(s_0)) \neq 0.$$

常螺線の例：

回転数？

Q

- 空間内の閉曲線についても平面上の閉曲線のように「回転数」というのは定義されているのでしょうか．個人的には問題 4-1 のように正射影を考えて，それについての回転数が空間内の閉曲線の「回転数」になるかと思ったのですが，射影をとる平面によって回転数が変わるのではと考えています．
- 一般の m 次直交空間における閉曲線のガウス写像は定義できますか？また，全曲率とどのような関係を持ちますか．

A

- 問題 4-1 のように射影をとると特異点がでることもある．
- ガウス写像は $\gamma' : I \to S^{m-1}$（S^{m-1} は $m-1$ 次元球面）として平面曲線と同様に定義できます．全曲率はその像の弧長．

類題

問題

弧長 s でパラメータ付けられた空間曲線 $\gamma(s)$ の曲率 κ は零点をもたず，捩率 τ は κ の m 倍（m は定数）とする．
このとき，大きさ 1 の定ベクトル v で $\gamma'(s)$ と一定の角度を成すものが存在することを示しなさい．

- フルネ枠 $(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ をとる．
- $\boldsymbol{v}(s) = a(s)\boldsymbol{e}(s) + b(s)\boldsymbol{n}(s) + c(s)\boldsymbol{b}(s)$ とおく．
- 大きさの条件：$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = 1$．
- 角度一定の条件：$\boldsymbol{v} \cdot \gamma'$ が一定．
- $\boldsymbol{v}$ が定ベクトルである条件：$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{0}$．

問題 4-2

問題

$\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$：$\mathbb{R}$ 係数の n 次正方行列全体；$[X,Y] := XY - YX$
$\mathrm{Alt}(n,\mathbb{R}) \subset \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$：交代行列全体

1. X, $Y \in \mathrm{Alt}(n,\mathbb{R}) \Rightarrow [X,Y] \in \mathrm{Alt}(n,\mathbb{R})$.
2. とくに $n=3$ のとき，
$$\iota\colon \mathbb{R}^3 \ni \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \iota(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Alt}(3,\mathbb{R})$$
とおくと $\iota(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}) = [\iota(\boldsymbol{x}),\iota(\boldsymbol{y})]$.
3. $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$ に対し
$(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{z} + (\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z})\times\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$.
4. 区間 $I \subset \mathbb{R}$ から $\mathrm{SO}(n)$ への C^∞-級写像 $\mathcal{F}$ に対し $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}'$ は交代行列.

問題 4-2

問題

$\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$：$\mathbb{R}$ 係数の n 次正方行列全体；$[X,Y] := XY - YX$
$\mathrm{Alt}(n,\mathbb{R}) \subset \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$：交代行列全体

1. X, $Y \in \mathrm{Alt}(n,\mathbb{R}) \Rightarrow [X,Y] \in \mathrm{Alt}(n,\mathbb{R})$.

- $A \in \mathrm{Alt}(n,\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^tA = -A$.
- ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

注意：
交換子積 $[\ ,\ ]$ は，ベクトル空間 $\mathrm{Alt}(n,\mathbb{R})$ の双線形かつ交代的な積を与える．

問題 4-2

問題

$\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$：$\mathbb{R}$ 係数の n 次正方行列全体； $[X,Y] := XY - YX$
$\mathrm{Alt}(n,\mathbb{R}) \subset \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$：交代行列全体

2. とくに $n=3$ のとき，

$$\iota\colon \mathbb{R}^3 \ni \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \iota(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Alt}(3,\mathbb{R})$$

とおくと $\iota(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}) = [\iota(\boldsymbol{x}), \iota(\boldsymbol{y})]$.

そのまま計算すればよいが，
$\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$ とおいて

$$\iota(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2) = \iota(\boldsymbol{e}_3), \qquad [\iota(\boldsymbol{e}_1), \iota(\boldsymbol{e}_2)] = \iota(\boldsymbol{e}_3)$$

などを示せばよい（双線型性，交代性から 3 通りを示せばよい）

問題 4-2

問題

$\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$：$\mathbb{R}$ 係数の n 次正方行列全体； $[X,Y]:=XY-YX$
$\mathrm{Alt}(n,\mathbb{R})\subset \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$：交代行列全体

3. $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{z}+(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z})\times\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$.

$X:=\iota(\boldsymbol{x})$, $Y=\iota(\boldsymbol{y})$, $Z=\iota(\boldsymbol{z})$ とすると

$$[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=\cdots=O. \qquad (*)$$

- 双線形・交代的な積 $[\ ,\ ]$ で (*) を満たすものが与えられている線型空間をリー環，リー代数という．
- ι はリー代数 $(\mathbb{R}^3,\times)$ から $(\mathrm{Alt}(3),[\ ,\ ])$ の間の同型を与える．

ベクトル三重積の公式（テキスト付録 A-3）を用いてもよい．

問題 4-2

問題

4. 区間 $I \subset \mathbb{R}$ から $\mathrm{SO}(n)$ への C^∞-級写像 $\mathcal{F}$ に対し $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}'$ は交代行列.

- $\mathcal{F}$ は直交行列に値をとるから ${}^t\mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1}$.
- $I = {}^t\mathcal{F}\mathcal{F}$ の両辺を t で微分して

$$O = {}^t\mathcal{F}'\mathcal{F} + {}^t\mathcal{F}\mathcal{F}' = {}^t({}^t\mathcal{F}\mathcal{F}') + {}^t\mathcal{F}\mathcal{F}'.$$

事実

直交群 $\mathrm{SO}(n)$ のリー環は $\mathrm{Alt}(n, \mathbb{R})$.

質問と回答

Q

問題 4-2 (4) **の** $\mathcal{F}^{-1}$ **とは「写像** $\mathcal{F}$ **の逆像」ではなく「直交行列の逆行列」という意味でとらえていますが，あっていますか？**

A

文脈で考えてみよう．もし「逆像」だったとして，それと $\mathcal{F}$ **を「かける」というのはどういう意味でしょう．** $\mathcal{F}\colon I \to \mathrm{SO}(n)$ **なので，逆像は** I **の部分集合．**