幾何学概論第一 (MTH.B211)

5: 陰関数定理

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2020/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2020/10/29

目標

事実

$\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義された C^∞-級関数 F に対して $\boxed{S := \{(x,y)\,;\,F(x,y)=0\}}$ が空集合でないとする．もしも S の各点で $dF=(F_x,F_y)\neq\mathbf{0}$ ならば，S は $\mathbb{R}^2$ の自己交叉をもたないなめらかな曲線となる．

$$\{(x,y)\ |\ x^2+y^2-1=0\}$$

$\mathbb{R}^2$

$+$

円

ϕ

$$y=f(x)\ :\ \text{graph}$$

$$\{(x,y)\ |\ y-f(x)=0\}$$

$$dF=(F_x,F_y)\neq 0$$

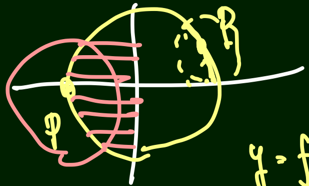
なめらかな曲線

- $\mathbb{R}^2$ の部分集合 C が（自己交叉のない）なめらかな曲線であるとは，各点 $\mathrm{P} \in C$ に対して P の近傍 $U \subset \mathbb{R}^2$，$\mathbb{R}$ の開区間 I，C^∞-級関数 $f\colon I \to \mathbb{R}$ が存在して

$$C \cap U \quad \text{が} \quad \{(x, f(x))\,;\, x \in I\} \quad \text{と合同となること.}$$

- $\mathbb{R}^2$ の区間 J で定義された C^∞-級写像 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^2$ がなめらかな曲線であるとは，J の各点 t に対して t を含む開区間 J_t が存在して $\gamma(J_t) \subset \mathbb{R}^2$ がなめらかな曲線となること．

$x^2+y^2=1$



$y=f(x)$

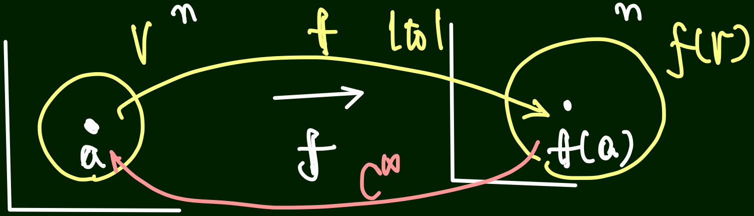
$\uparrow C^\infty$

逆写像定理

定理 (逆写像定理)

n を正の整数とする．$\mathbb{R}^n$ の領域 U で定義された C^∞-級写像 $\boldsymbol{f}\colon U \to \mathbb{R}^n$ のヤコビ行列式が $\boldsymbol{a} \in U$ で零でないとすると，ある $\boldsymbol{a}$ の近傍 V が存在して次を満たす：

- $\boldsymbol{f}|_V\colon V \to \mathbb{R}^n$ は単射,
- $(\boldsymbol{f}|_V)^{-1}\colon \boldsymbol{f}(V) \to U$ は C^∞-級.



Jacobi 行列式 ≠ 0 at a

パラメータ表示された曲線

定理

正則にパラメータ表示された曲線 $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ はなめらかな曲線.

証明.

- $\gamma(t) = \bigl(x(t), y(t)\bigr)$ とおくと $x, y\colon I \to \mathbb{R}$ は C^∞-級.
- $t_0 \in I$ をとる．正則性から $\dot\gamma(t_0) \neq 0$ だから $\dot x(t_0)$, $\dot y(t_0)$ のいずれかは零でない.
- $\dot y(t_0) \neq 0$ のとき，逆写像定理から t_0 を含む開区間 I' で $y|_{I'}$ が単射，逆 $\varphi\colon J' := y(I') \to I'$ が C^∞-級となるものが存在.
- $\gamma(I') = \bigl\{\bigl(x(t), y(t)\bigr)\,;\, t \in I'\bigr\} = \{(\underbrace{x\circ\varphi(y)}_{=f(y)}, \underbrace{y\circ\varphi(y)}_{=y}); y \in J'\}$
  $\boxed{= \{(f(y), y)\,;\, y \in J'\}}$ $(f = x\circ\varphi)$
  右辺は $\{(x, f(x))\,;\, x \in J'\}$ と合同.

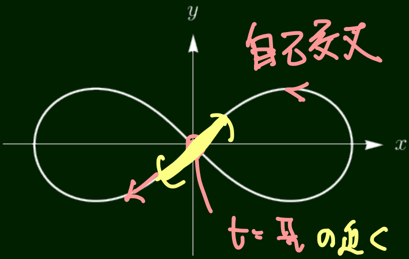
$\dot x(t_0) \neq 0$ の場合も同様. □

例（レムニスケート）

レムニスケート（周期 2π）

$$\gamma(t) = \left(\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}, \frac{\sin t\cos t}{1+\sin^2 t}\right) = \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}(1, \sin t)$$

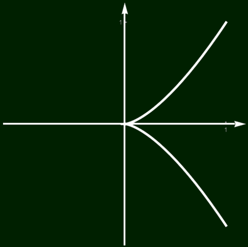
$$\dot\gamma(t) = -\frac{\sin t(2+\cos^2 t)}{(1+\sin^2 t)^2}(1, \sin t) + \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}(0, \cos t) \neq \mathbf{0}$$



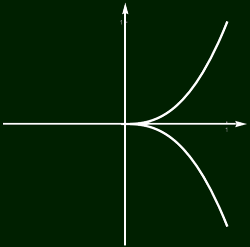
$$\gamma(\pm\tfrac{\pi}{2}) = (0,0)$$

パラメータ表示の特異点

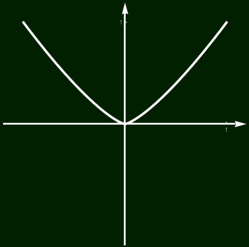
- パラメータ表示された曲線 γ の特異点：$\dot{\gamma}(t_0) = \mathbf{0}$ となる点.
- $\dot{\gamma}(t_0) = \mathbf{0}$ ということだけから曲線の形はわからない.



(t^2, t^3).



(t^2, t^5)



(t^3, t^4)

$(t^3, 0)$

$y = \sqrt[3]{x^4}$

C^1-級

陰関数定理

定理 (講義資料 5; 系 5.3)

$\mathbb{R}^n$ の領域 U 上で定義された C^∞-級関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ が，
$\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n) \in U$ で

$$F(\boldsymbol{a}) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \neq 0$$

$F = 0$

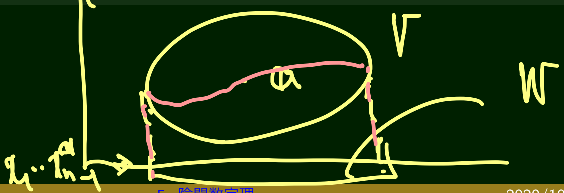
$x_n = f(x_1 \cdots x_{n-1})$

を満たしているとき，$\boldsymbol{a} \in U$ の近傍 V と $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ の近傍 W 上で定義された関数 f が存在して

x_nについて解く

graph

$\{\boldsymbol{x} \in V\,;\, F(\boldsymbol{x}) = 0\} = \{(\boldsymbol{w}, f(\boldsymbol{w}))\,;\, \boldsymbol{w} \in W\}$，とくに
$F(\boldsymbol{w}, f(\boldsymbol{w})) = 0$ $(\boldsymbol{w} \in W)$ が成り立つ．



曲線の陰関数表示

定理 (講義資料 5; 系 5.5)

$\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義された C^∞-級関数 F に対して $S := \{(x,y)\,;\, F(x,y) = 0\}$ が空集合でないとする．もしも S の各点で $dF = (F_x, F_y) \neq \mathbf{0}$ ならば，S は $\mathbb{R}^2$ の自己交叉をもたないなめらかな曲線となる．

- $P \in S$　　$F_y \neq 0$ at P

  $\Rightarrow S : y = f(x)$ (P の近く)

  $F_x \neq 0 \Rightarrow S : x = g(y)$

例

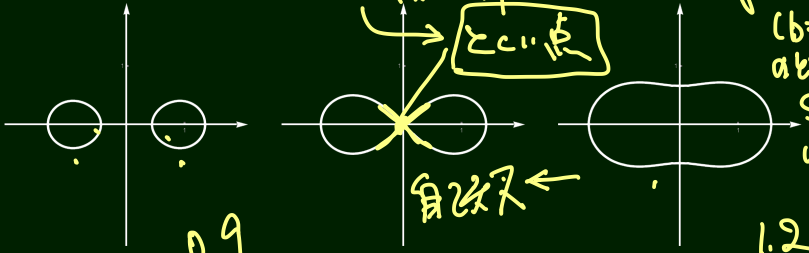
2 点 $(\pm 1, 0)$ からの距離の積が一定 b^2（$b > 0$）な点の集合 S_b は

$$\cancel{F_b(x,y)} F_b(x,y) := \left((x-1)^2 + y^2\right)\left((x+1)^2 + y^2\right) - b^4$$

の零点集合（カッシニの橙線）$b \neq 1$ のときなめらかな曲線を与える.

$F_x = F_y = 0 \iff x = y = 0$

(b=1 の時は $S_b \ni (0,0)$)



$b = \cancel{1.2}$ 0.9　　$b = 1$　　$b = \cancel{0.9}$ 1.2

陰関数表示の特異点

陰関数 $F(x,y)=0$ で与えられる xy 平面の曲線上の点 (x_0,y_0) が特異点であるとは,

$$\underline{dF(x_0,y_0)=\big(F_x(x_0,y_0),F_y(x_0,y_0)\big)=\mathbf{0}}$$

となることである.

Example

レムニスケート（カッシニの橙線の $b=1$ の場合）上の点 $(0,0)$ は特異点である.

陰関数の微分公式

陰関数 $F(x,y)=0$ が y について，$\boxed{y=f(x)}$ と書けるとき，

$$f'(x)=-\frac{F_x(x,f(x))}{F_y(x,f(x))}.$$

問題

$f''(x)$ を F の偏導関数で表しなさい．

$$f''(x) = -\frac{1}{F_y^2}\left(\frac{d}{dx}F_x(x,f(x))\,F_y - \cdots\right)$$

$$\frac{d}{dx}F_x(x,f(x)) = F_{xx} + f'(x)F_{xy}.$$

問題 5-1

問題

次は正しいか，理由をつけて答えなさい．

1. $\mathbb{R}$ の開区間 I 上で定義された C^∞-級関数 $f\colon I \to \mathbb{R}$ が I の各点で $f' \neq 0$ を満たしているとすると，f は単射で，C^∞-級の逆写像 $f^{-1}\colon f(I) \to I$ が存在する．
2. $\mathbb{R}^2$ の領域 U 上で定義された C^∞-級写像 $g\colon U \to \mathbb{R}^2$ のヤコビ行列式が U の各点で零でないならば，g は単射で，C^∞-級の逆写像 $g^{-1}\colon g(U) \to U$ が存在する．

問題

を除く

$F(x,y) = x^4 + y^4 - 1$ とおくと，$F^{-1}(\{0\})$ は平面のなめらかな曲線を与える．この曲線の曲率は符号を変えないことを示しなさい．

$x^4 + y^4 = 1$